



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a XII-a

Problema 1

Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ definite prin termenul general $a_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \arcsin(nx) dx$ și
respectiv $b_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \arctg(nx) dx$.

a) Arătați că $a_n \leq 2b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Problema 2

Determinați funcțiile continue $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\int_0^x f(t) dt = \int_{x^2}^1 f(t) dt$,
pentru orice $x \in [0,1]$.

Gazeta Matematică

Problema 3

Se consideră inelul claselor de resturi $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Dacă n este număr prim, arătați că $(x+y)^n = x^n + y^n$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_n$.

b) Dacă $(x+y)^n = x^n + y^n$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_n$, arătați că n este liber de pătrate.

c) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}_n^*$ astfel încât $b = ac$ și mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid ax = \hat{0}\}$ și
 $B = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid ax = b\}$. Arătați că A și B au același număr de elemente

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a XI-a

Problema 1

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir dat de $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n^2$, pentru orice $n \geq 0$.

Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

Gazeta Matematică

Problema 2

Fie matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^{2026} = A^2$. Arătați că matricea $I_2 - A + A^2$ este inversabilă.

Problema 3

Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $b \in \mathbb{R}$, g continuă cu $g\left(\frac{b}{1-a}\right) = 0$ și care pentru orice $x \in \mathbb{R}$ verifică relațiile:

$g(x) \leq (g \circ f)(x) + f(x) - \frac{b}{1-a}$, $g(x) \leq (g \circ f^{-1})(x) - x + \frac{b}{1-a}$, unde f^{-1} este inversa funcției f .

a) Pentru $b = 0$, arătați că $g(x) = \frac{ax}{1-a}$.

b) Pentru $a \in (-1, 1)$ determinați funcția g .

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a X-a

Problema 1

Se consideră numărul complex $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ și funcțiile $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = z - \varepsilon$ și $\varepsilon f(z) + f(\varepsilon z) = g^2(z)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

- a) Dacă $|g(z)| < 1$ și $|g(z^2)| < 1$, arătați că $|z| < \frac{3}{2}$.
b) Determinați funcția f .

Problema 2

Determinați soluțiile reale ale sistemului
$$\begin{cases} 2^{x^2} + 2^{1-y} = 3 \\ 2^{y^2} + 2^{1-x} = 3 \end{cases}$$
.

Gazeta Matematică

Problema 3

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale strict crescător cu $a_1 > 0$ care are proprietatea că $a_n + a_{n+2} \leq 2a_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ și toți termenii șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt numere naturale, determinați șirul $(a_n)_{n \geq 1}$.

b) Dacă $p \geq 2$ este număr natural, calculați

$$\left[\frac{\sqrt[p]{a_1} + \sqrt[p]{a_3}}{\sqrt[p]{a_2}} + \frac{\sqrt[p]{a_2} + \sqrt[p]{a_4}}{\sqrt[p]{a_3}} + \frac{\sqrt[p]{a_3} + \sqrt[p]{a_5}}{\sqrt[p]{a_4}} + \dots + \frac{\sqrt[p]{a_n} + \sqrt[p]{a_{n+2}}}{\sqrt[p]{a_{n+1}}} \right], n \in \mathbb{N}^*.$$

($[a]$ reprezintă partea întregă a numărului real a)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a IX-a

Problema 1

Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definită prin $f(n) = \left[\frac{n}{2} \right]$.

- a) Dacă șirul de numere naturale $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică astfel încât șirul $(f(a_n))_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică, atunci arătați că toți termenii șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ au aceeași paritate.
- b) Determinați numerele naturale nenule m, n, p știind că $f(n^3) = p^m$ și p este prim.
- c) Determinați funcțiile $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care pentru orice $n \in \mathbb{N}$ verifică relațiile $g(n) \leq f(n)$,

$$g(n+1) > g(n) - \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a)

Problema 2

Fie triunghiul ABC și $D \in (BC)$ astfel încât $BC = 3 \cdot BD$. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și M simetricul lui I față de D . Știind că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, arătați că ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Problema 3

Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a + b + c = 1$. Demonstrați inegalitatea $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} + 18abc \leq 1$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a VIII-a

Problema 1

a) Demonstrați că dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și m și n sunt numere naturale cu aceeași paritate, atunci

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leq \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2}.$$

b) Demonstrați că $\frac{a^{100} + b^{100}}{2} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^{50}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 2.

Fie a, b, c numere reale nenule, distincte două câte două și d un număr real. Să se demonstreze că ecuațiile $ax^2 + (b+d)x + c = 0$, $bx^2 + (c+d)x + a = 0$, $cx^2 + (a+d)x + b = 0$ au o soluție comună dacă și numai dacă $a + b + c + d = 0$.

Problema 3.

Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub și M, N, P, Q mijloacele muchiilor BC, AD, CC' , respectiv DD' . Notăm $AM \cap BD = \{E\}$, $CN \cap BD = \{F\}$, $DP \cap CD' = \{E'\}$, $C'Q \cap CD' = \{F'\}$.

- Demonstrați că $EE' = FF'$ și $EE' \parallel (AC'Q)$.
- Determinați sinusul unghiului format de dreptele EE' și FF' .
- Fie G centrul de greutate al triunghiului ABD . Demonstrați că $EE' \parallel (GFF')$.

Traian Preda
Gazeta Matematică nr. 1/2026

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a VII-a

Problema 1

Pentru orice număr natural nenul k , demonstrați că numărul $\sqrt{1 + \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4k^2}}$ este rațional.

Gheorghe Radu
Gazeta Matematică nr. 1/2026

Problema 2.

a) Demonstrați că

$$\frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{4^2+1}{4^2-1} + \dots + \frac{2026^2+1}{2026^2-1} > 2026.$$

b) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:

$$\left[\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+2n+2} \right] + \left[\sqrt{n^2+4n+3} + \sqrt{n^2+4n+5} \right] + \dots + \left[\sqrt{4n^2-1} + \sqrt{4n^2+1} \right] \geq 6n-3.$$

S-a notat cu $[a]$, partea întreagă a numărului real a .

Problema 3.

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AC > AB$ și cercul circumscris acestuia. Semidreapta AI este bisectoarea unghiului BAC , $I \in BC$. AI intersectează cercul a doua oară în punctul E . Tangentele la cerc în punctele E și C se intersectează în punctul F , iar AE și CF se intersectează în punctul N .

a) Demonstrați că $\frac{1}{CN} + \frac{1}{CI} = \frac{1}{CF}$.

b) Dacă punctul M este mijlocul laturii BC și $K \in AC$ astfel încât $MK \parallel AI$, atunci să se demonstreze că $2AK = AC - AB$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a VI-a

Problema 1

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$, (a, b) = cel mai mare divizor comun al numerelor a și b , iar $[a, b]$ = cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

- Se știe că $(a, b) + [a, b] = 100$. Determinați toate perechile (a, b) pentru care unul dintre numere îl divide pe celălalt.
- Demonstrați că $(a, b)^2 + [a, b]^2 \geq a^2 + b^2$.

Problema 2.

Pe bilele dintr-o urnă sunt scrise numerele naturale cuprinse între 2^{10} și 2^{11} . Se extrage o bilă. Aflați probabilitatea ca numărul scris pe aceasta să aibă trei divizori.

Ion Tudor
Gazeta Matematică nr. 1/2026

Problema 3.

Pe o dreaptă d se consideră punctele O, M_1, M_2, \dots, M_n în această ordine, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Fie punctul P exterior dreptei d , astfel încât măsura unghiului $\sphericalangle POM_1$ este egală cu 120° iar măsurile unghiurilor $\sphericalangle OPM_1, \sphericalangle OPM_2, \dots, \sphericalangle OPM_n$, respectiv măsurile unghiurilor $\sphericalangle PM_1O, \sphericalangle PM_2O, \dots, \sphericalangle PM_nO$, sunt numere prime diferite (exprimate în grade).

- Aflați valoarea maximă a lui n .
- Dacă n are valoare maximă, arătați că oricum am alege patru dintre unghiurile $\sphericalangle M_1PM_2, \sphericalangle M_2PM_3, \dots, \sphericalangle M_{n-1}PM_n$, există printre ele două congruente.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a V-a

Problema 1.

Să se determine restul împărțirii lui N prin n în cazurile:

- a) $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1020 + 1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$ și $n = 2026$;
b) $N = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2026}$ și $n = 63$.

Problema 2.

Să se compare numerele:

- a) $a = 3^{22} + 3^{21}$ și $b = 5^{14} + 2^{33}$;
b) $m = 5^{13}$ și $n = 3^{21} - 2^{31}$.

Problema 3.

Fie numărul $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{2n-1} a_{2n}}$ cu $2n$ cifre nenule. Se știe că orice cifră a numărului situată pe poziție pară este de patru ori mai mare decât precedenta de pe poziția impară (adică este îndeplinită condiția $a_{2k} = 4 \cdot a_{2k-1}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$).

- a) Demonstrați că nu există astfel de numere cu suma cifrelor 2026.
b) Determinați cel mai mic și cel mai mare astfel de număr cu suma cifrelor 2025.

*Adrian Gobej, Curtea de Argeș
Gazeta Matematică nr. 1/2026*

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.