MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a XII-a

Bareme de evaluare şi notare

Problema 1.

Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *definite prin termenul general* $a_n = \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \arcsin(nx)dx$ *și*

respectiv $b_n = \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \operatorname{arc}tg(nx)dx$.

a) *Arătați că* $a_n \leq 2b_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

b) *Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Anca Bănică, Slobozia

Soluție:

Oficiu 1p

a) Cu schimbarea de variabilă $y = nx$, obținem $a_n = \frac{1}{n}\int\limits_{\frac{n}{n+1}}^{1} \arcsin y \cdot dy$, $b_n = \frac{1}{n}\int\limits_{\frac{n}{n+1}}^{1} \operatorname{arc}tgy \cdot dy$ și

$a_n - 2b_n = \frac{1}{n}\int\limits_{\frac{n}{n+1}}^{1} (\arcsin y - 2arctgy)dy$.

Fie funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x - 2arctgx$. Pentru $x \in [0,1)$ avem

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ sau $f'(x) = \frac{x^4+6x^2-3}{\left(1+x^2+2\sqrt{1-x^2}\right)(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

.... **2p**

Pentru $x \geq \frac{4}{5}$ avem $x^4 + 6x^2 - 3 \geq 6x^2 - 3 \geq \frac{96}{25} - 3 = \frac{21}{25} \geq 0$, deci funcția continuă f este crescătoare pe $\left[\frac{4}{5},1\right)$, iar cum $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = f(1)$, avem $f(x) \leq f(1) = \frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{4} = 0$, $\forall x \in \left[\frac{4}{5},1\right]$. Pentru $n \geq 4$, avem $\frac{n}{n+1} \geq \frac{4}{5}$, adică $\left[\frac{n}{n+1},1\right] \subset \left[\frac{4}{5},1\right]$ și atunci $\int\limits_{\frac{n}{n+1}}^{1} f(y)dy \leq 0$, adică $a_n \leq 2b_n$, pentru orice $n \geq 4$. **2p**

b) Aplicăm teorema de medie pentru fiecare din cele două integrale definite și rezultă că există $\xi_n, \rho_n \in \left(\frac{n}{n+1}, 1\right)$ astfel încât $a_n = \frac{1}{n}\int_{\frac{n}{n+1}}^{1} \arcsin(y)dy = \frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\arcsin(\xi_n)$,

$b_n = \frac{1}{n}\int_{\frac{n}{n+1}}^{1} \mathrm{arc}tg(y)dy = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\mathrm{arc}tg(\rho_n)$. Rezultă atunci că $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\arcsin(\xi_n)}{arctg(\rho_n)}$ **3p**

Cum $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \lim_{n\to\infty}\rho_n = 1$, avem $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\arcsin 1}{arctg 1} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = 2$ **2p**

Problema 2.

Determinați funcțiile continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $\int_0^x f(t)\,dt = \int_{x^2}^1 f(t)\,dt$, *pentru orice* $x\in[0,1]$.

Gazeta Matematică

Soluție:

Oficiu **1p**

Fie $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Relația din enunț se scrie $F(x)-F(0)=F(1)-F(x^2)$. Prin derivare se obține

$$f(x) = -2xf(x^2)\ ,\ \forall x\in[0,1] \quad (*)$$

.... **2p**

Demonstrăm întâi că $f(x)=0$, pentru orice $x\in(0,1)$. Presupunem că există $x_0\in(0,1)$ astfel încât $f(x_0)\neq 0$. Pentru $x=x_0$ relația (*) devine

$$f(x_0) = -2x_0 f(x_0^2)\ ,\ f(x_0), f(x_0^2)\neq 0 \quad (1)$$

Înlocuind în (1) pe x_0 cu $x_0^2, x_0^4, \ldots, x_0^{2^{n-1}}$, obținem relațiile

$$f(x_0^2) = -2x_0^2 f(x_0^4)\ ,\ f(x_0^2), f(x_0^4)\neq 0 \quad (2)$$

$$f(x_0^4) = -2x_0^4 f(x_0^8)\ ,\ f(x_0^4), f(x_0^8)\neq 0 \quad (3)$$

....

$$f\left(x_0^{2^{n-1}}\right) = -2x_0^{2^{n-1}} f\left(x_0^{2^n}\right)\ ,\ f\left(x_0^{2^{n-1}}\right), f\left(x_0^{2^n}\right)\neq 0 \quad (n)$$

.... **3p**

Din relațiile de mai înainte prin înmulțire și ținând cont că $f\left(x_0^{2^k}\right)\neq 0$, $k=\overline{1,n}$, obținem

$f(x_0) = (-2)^n x_0^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}} f\left(x_0^{2^n}\right)$ adică $f(x_0) = (-1)^n 2^n x_0^{2^n-1} f\left(x_0^{2^n}\right)$ sau

$f(x_0)=(-1)^n 2^n x_0^{2^n} f\left(x_0^{2^n}\right)\cdot\frac{1}{x_0}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_0^{2^n}\right)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_0^{2^n}\right)=f(0)$, pentru că f este continuă și $x_0\in(0,1)$. **2p**

De asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n x_0^{2^n}=\lim\limits_{p\to\infty} p x_0^p=0$, pentru că $x_0\in(0,1)$. Atunci

$f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n 2^n x_0^{2^n}\cdot f\left(x_0^{2^n}\right)\cdot\frac{1}{x_0}\right)=0$. Contradicție.

Deci $f(x)=0$, pentru orice $x\in(0,1)$ și cum f continuă pe $[0,1]$ rezultă $f(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$, funcție care verifică relația din enunț. **2p**

Problema 3.

Se consideră inelul claselor de resturi $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

a) *Dacă n este număr prim arătați că $(x+y)^n=x^n+y^n$ pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_n$.*

b) *Dacă $(x+y)^n=x^n+y^n$ pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_n$, arătați că n este liber de pătrate.*

c) *Fie $a,b,c\in\mathbb{Z}_n^*$ astfel încât $b=ac$ și mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}_n \middle| ax=\hat{0}\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{Z}_n \middle| ax=b\right\}$. Arătați că A și B au același număr de elemente.*

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție:

Oficiu 1p

a) Deoarece n este prim, atunci $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ este corp, deci $(\mathbb{Z}_n^*,\cdot)$ este grup și atunci pentru orice $a\in\mathbb{Z}_n^*$ avem $a^{ord(\mathbb{Z}_n^*)}=a^{n-1}=\hat{1}$ și imediat $a^n=a$. Cum $\hat{0}^n=\hat{0}$, rezultă că $a^n=a$, $\forall a\in\mathbb{Z}_n$. Imediat $(x+y)^n=x+y=x^n+y^n, \forall x,y\in\mathbb{Z}_n$. **3p**

b) În relația $(x+y)^n=x^n+y^n$, facem $x=\hat{1}$, $y=-\hat{1}$ și obținem $\hat{1}+\left(-\hat{1}\right)^n=\hat{0}$. Dacă n este număr par, avem $\hat{2}=\hat{0}$, adică $n=2$. Evident 2 este liber de pătrate. **1p**

Fie n număr impar. Evident $\hat{0}^n=\hat{0}$ și $\hat{1}^n=\hat{1}$. Avem $\hat{2}^n=\left(\hat{1}+\hat{1}\right)^n=\hat{1}^n+\hat{1}^n=\hat{1}+\hat{1}=\hat{2}$, $\hat{3}^n=\left(\hat{2}+\hat{1}\right)^n=\hat{2}^n+\hat{1}^n=\hat{2}+\hat{1}=\hat{3}$ și recursiv $\left(\widehat{k+1}\right)^n=\hat{k}^n+\hat{1}^n=\hat{k}+\hat{1}=\left(\widehat{k+1}\right)$, deci $x^n=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}_n$. **1p**

Demonstrăm că n este liber de pătrate. Dacă prin absurd există p număr prim astfel încât $p^2 | n$, atunci $n=p^2\cdot m$. Fie $x=\widehat{pm}\neq\hat{0}$, atunci $x^2=\hat{n}\hat{m}=\hat{0}$, deci $x^n=x^2x^{n-2}=\hat{0}\neq x$; contradicție. Așadar n este liber de pătrate. **2p**

c) Cele două mulțimi sunt nevide ($\hat{0}\in A$ și $c\in B$). Considerăm funcția $f:A\to B$, $f(x)=x+c$, care este bine definită, deoarece $\forall x\in A$, avem $a(x+c)=ax+ac=b$, adică $f(x)\in B$. Se arată că funcția este bijectivă și atunci $CardA=CardB$.

.... **2p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Soluție alternative pentru a)

Demonstrăm că dacă p este număr prim, atunci C_p^k, $k=\overline{1,p-1}$ se divid cu p. Avem $C_p^k=\dfrac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!}\in\mathbb{N}$, deci $k!\,|\,p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)$, Deoarece p este prim, $k<p$ și $(k!,p)=1$, rezultă că $k!\,|\,(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)$, deci $C_p^k=p\cdot a$, unde $a=\dfrac{(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!}\in\mathbb{N}$. Atunci în $\mathbb{Z}_p$ avem $C_p^k=p\cdot a=\hat{0}$, Pentru n număr prim, avem $(x+y)^n=x^n+y^n+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k x^{n-k}y^k=x^n+y^n$.

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC"
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a XI-a

Bareme de evaluare şi notare

Problema 1.

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir dat de $x_0 = 1$ şi $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n^2$, pentru orice $n \geq 0$.
Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Soluție:

Oficiu ………………………………………………………………………………….. 1p

Avem $x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2}x_n^2 \leq 0$, ceea ce înseamnă că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător . De asemenea cum şirul este descrescător, rezultă că $x_n \leq x_0 = 1, \forall n \geq 0$. Prin inducție se demonstrează că $x_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$. Așadar şirul este monoton şi mărginit deci este convergent. ……........……… **3p**

Fie $x_n = L \in \mathbb{R}$. Trecând la limită în relația de recurență obținem ecuația $L = L - \frac{1}{2}L^2$ cu soluția $L = 0$. ……………………………………………………........……………………… **1p**

Avem $nx_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \frac{a_n}{b_n}$. Vom folosi teorema Stolz-Cesaro:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}} = \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \frac{x_n^2\left(1-\frac{1}{2}x_n\right)}{\frac{1}{2}x_n^2} = 2\left(1-\frac{1}{2}x_n\right)$$ ………………..........……… **2p**

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{2}x_n\right) = 2$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 2$ …………….............……… **2p**

Problema 2.

Fie matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^{2026} = A^2$. Arătați că matricea $I_2 - A + A^2$ este inversabilă.

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție:

Oficiu ………………………………………………………………………………………….. **1p**

Fie $B=I_2-A+A^2$. Din $A^{2026}=A^2$, rezultă $\det\left(A^{2026}\right)=\det A^2 \Rightarrow (\det A)^{2026}=(\det A)^2$ și atunci $\det A\in\{0,1,-1\}$. …………………………………………………………………… **1p**

I. Dacă $\det A=0$, din formula Hamilton – Cayley, avem $A^2=tr(A)\cdot A$ și imediat $A^{2026}=(trA)^{2025}\cdot A$. Rezultă $(trA)^{2025}\cdot A=(trA)A$. De aici $A=O_2$ sau $trA=1$ sau $trA=0$ sau $trA=-1$. ……………………………………………………………………………………… **1p**

1. Pentru $A=O_2$, avem $B=I_2$ iar pentru $trA=1$, avem $A^2=A$ și atunci $B=I_2-A+A=I_2$, deci B este inversabilă…………………………………………………………………… **1p**

2. Pentru $trA=0$, avem $A^2=O_2$ și atunci $B=I_2-A$. Dar $B(I_2+A)=(I_2+A)B=I_2-A^2=I_2$ deci B este inversabilă. …………………………… **1p**

3. Pentru $trA=-1$, avem $A^2=-A$ și atunci $B=I_2-A-A=I_2-2A$. Ținând cont că $A^2=-A$, căutăm o matrice $C=I_2+aA$ astfel încât $BC=CB=I_2$. Avem $BC=CB=(I_2-2A)(I_2+aA)=I_2+(a-2)A-2aA^2=I_2+(3a-2)A$. Atunci pentru $a=\frac{3}{2}$, avem $BC=CB=I_2$, deci matricea B este inversabilă. …………………………………… **1p**

II. Dacă $\det A=1$, atunci A este inversabilă, $A^2=(trA)A-I_2$ și $B=(trA-1)A$. Demonstrăm că $trA-1\neq 0$ și atunci B este inversabilă. Presupunem prin absurd că $trA=1$ și atunci $A^2=A-I_2$ sau $A^2-A+I_2=O_2$ și imediat $A^3+I_2=O_2$. Din $A^3=-I_2$ rezultă $A^{2026}=\left(A^3\right)^{675}\cdot A=(-I_2)^{675}\cdot A=-A$. Atunci $A^2=A^{2026}=-A$ și cum $A^2=A-I_2$ rezultă $A=-\frac{1}{2}I_2$ contradicție cu $\det A=1$ sau cu $trA=1$. ………………………………… **2p**

III. Dacă $\det A=-1$, atunci A este inversabilă, $A^2=(trA)A+I_2$ și $B=2I_2+(trA-1)A$.
Dacă $trA=1$, atunci $B=2I_2$, care este inversabilă.

Dacă $trA-1\neq 0$, avem $B=2(I_2+aA)$ cu $a=\frac{trA-1}{2}\neq 0$.

Analog ca la **I.3.** căutăm o matrice $C=\frac{1}{2}(I_2+xA)$ astfel încât $BC=CB=\alpha I_2$, cu $\alpha\neq 0$.
Avem $BC=CB=(I_2+aA)(I_2+xA)=I_2+(a+x)A+axA^2$. Cum $A^2=(trA)A+I_2=I_2+(2a+1)A$, avem $BC=CB=I_2+(a+x)A+ax\left(I_2+(2a+1)A\right)$, sau $BC=CB=(ax+1)I_2+\left(a+x+ax(2a+1)\right)A=(ax+1)\left(I_2+\frac{a+x+ax(2a+1)}{ax+1}A\right)$, impunem condiția $a+x+ax(2a+1)=0$ de unde $x=\frac{-a}{2a^2+a+1}$, $ax+1=\frac{-a^2}{2a^2+a+1}+1=\frac{a^2+a+1}{2a^2+a+1}\neq 0$,

Deci $BC=CB=\frac{a^2+a+1}{2a^2+a+1}I_2$, adică matricea B este inversabilă. …………………………… **2p**

Problema 3.

Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, cu $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, $b\in\mathbb{R}$, g continuă cu $g\left(\frac{b}{1-a}\right)=0$ și care pentru orice $x\in\mathbb{R}$ verifică relațiile:

$g(x)\le(g\circ f)(x)+f(x)-\frac{b}{1-a}$, $g(x)\le\left(g\circ f^{-1}\right)(x)-x+\frac{b}{1-a}$, unde f^{-1} este inversa funcției f.

a) Pentru $b=0$, arătați că $g(x)=\frac{ax}{1-a}$.

b) Pentru $a\in(-1,1)$ determinați funcția g.

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție:

Oficiu ………………………………………………………………………………….. 1p

a) Pentru $b=0$, avem $g(0)=0$, iar relațiile din enunț devin $g(x)\le g(ax)+ax$, $g(x)\le g\left(\frac{x}{a}\right)-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. În ultima relație înlocuim x cu ax și avem $g(ax)\le g(x)-ax$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Obținem în final $g(x)=g(ax)+ax, \forall x\in\mathbb{R}$ și $g(x)=g\left(\frac{x}{a}\right)-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ 1p

Pentru $a\in(-1,1)\setminus\{0\}$ în relația $g(x)=g(ax)+ax$, înlocuind succesiv pe x cu $ax,a^2x,\ldots,a^{n-1}x$, obținem relațiile $g\left(a^{k-1}x\right)=g\left(a^kx\right)+a^kx$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$ și însumând aceste relații, obținem $g(x)=g\left(a^nx\right)+\sum_{k=1}^{n}a^kx=g\left(a^nx\right)+a\frac{a^n-1}{a-1}x$, Deoarece funcția g este continuă și $a\in(-1,1)$, avem $g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x)=g(0)+\frac{a}{1-a}x=\frac{a}{1-a}x$ 2p

Pentru $|a|>1$ ($a\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$), în relația $g(x)=g\left(\frac{x}{a}\right)-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. înlocuind succesiv pe x cu $\frac{x}{a},\frac{x}{a^2},\ldots,\frac{x}{a^{n-1}}$, obținem relațiile $g\left(\frac{x}{a^{k-1}}\right)=g\left(\frac{x}{a^k}\right)-\frac{x}{a^{k-1}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$ și însumând aceste relații, obținem $g(x)=g\left(\frac{x}{a^n}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{a^{k-1}}=g\left(\frac{x}{a^n}\right)-\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n-1}{\frac{1}{a}-1}x$, Deoarece funcția g este continuă și $|a|>1$, avem $g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x)=g(0)+\frac{1}{\frac{1}{a}-1}x=\frac{a}{1-a}x$. Deci pentru $b=0$ și $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, $g(x)=\frac{a}{1-a}x$ 2p

b) Cum f este bijectivă, înlocuim în $g(x)\le\left(g\circ f^{-1}\right)(x)-x+\dfrac{b}{1-a}$ pe x cu $f(x)$ și obținem $(g\circ f)(x)\le g(x)-f(x)+\dfrac{b}{a-1}$ și ținând cont că $g(x)\le(g\circ f)(x)+f(x)-\dfrac{b}{1-a}$, obținem

$$g(x)=(g\circ f)(x)+f(x)-\frac{b}{1-a},\forall x\in\mathbb{R}\quad(1)$$

sau

$$g(x)=\left(g\circ f^{-1}\right)(x)-x+\frac{b}{1-a},\forall x\in\mathbb{R}\quad(2)$$ 1p

Notăm $f_p=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{f\ de\ p\ ori}$. Se demonstrează prin inducție că

$f_n(x)=a^n x+b\left(a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a+1\right)=a^n x+b\dfrac{a^n-1}{a-1}$.

În (1) înlocuind succesiv pe x cu $f(x),f_2(x),\ldots,f_{n-1}(x)$, obținem relațiile $g\left(f_{k-1}(x)\right)=g\left(f_k(x)\right)+f_k(x)-\dfrac{b}{1-a},\forall x\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$ ($f_0(x)=x$) și însumând aceste relații, obținem $g(x)=g\left(f_n(x)\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)-\dfrac{nb}{1-a}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ 1p

Deoarece

$\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^k x+b\dfrac{a^k-1}{a-1}\right)=a\dfrac{a^n-1}{a-1}x+\dfrac{b}{a-1}\left(a\dfrac{a^n-1}{a-1}-n\right)=a\dfrac{a^n-1}{a-1}x+\dfrac{ab\left(a^n-1\right)}{(a-1)^2}+\dfrac{nb}{1-a}$,

$\forall x\in\mathbb{R}$, atunci

$g(x)=g\left(a^n x+b\dfrac{a^n-1}{a-1}\right)+a\dfrac{a^n-1}{a-1}x+ab\dfrac{a^n-1}{(a-1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deoarece funcția g este continuă și $a\in(-1,1)$, avem $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(x)=g\left(\dfrac{b}{1-a}\right)+\dfrac{a}{1-a}x-\dfrac{ab}{(1-a)^2}$, și cum $g\left(\dfrac{b}{1-a}\right)=0$, rezultă

$g(x)=\dfrac{a}{1-a}x-\dfrac{ab}{(1-a)^2}=\dfrac{a}{1-a}\left(x-\dfrac{b}{1-a}\right)$ 2p

Obs. Se poate demonstra, folosind relația (2), că $g(x)=\dfrac{a}{1-a}\left(x-\dfrac{b}{1-a}\right)$ și pentru $|a|>1$.

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

MINISTERUL EDUCAȚIEI
ȘI CERCETĂRII

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a X-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1.

Se consideră numărul complex $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ și funcțiile $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g(z)=z-\varepsilon$ și $\varepsilon f(z)+f(\varepsilon z)=g^2(z)$, pentru orice $z\in\mathbb{C}$.

a) Dacă $|g(z)|<1$ și $\left|g\left(z^2\right)\right|<1$, arătați că $|z|<\frac{3}{2}$.

b) Determinați funcția f.

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție:

Oficiu **1p**

Avem $|\varepsilon|=1$, $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ și $\varepsilon^3=1$. **1p**

a) Avem $g\left(z^2\right)-g^2(z)=z^2-\varepsilon-(z-\varepsilon)^2=2\varepsilon z-\left(\varepsilon^2+\varepsilon\right)=2\varepsilon z+1$ și atunci

$2\varepsilon z=g\left(z^2\right)-g^2(z)-1$. **1p**

Avem $2|z|=2|\varepsilon z|=\left|g\left(z^2\right)-g^2(z)-1\right|\le\left|g\left(z^2\right)\right|+\left|g^2(z)\right|+|-1|<1+1+1=3$, de unde $|z|<\frac{3}{2}$.

.... **2p**

b) Pentru orice $z\in\mathbb{C}$, avem relația

$$\varepsilon f(z)+f(\varepsilon z)=g^2(z)\ (1)$$

În relația (1) înlocum z cu εz, respective εz^2 și ținând cont că $\varepsilon^3=1$, obținem relațiile

$$\varepsilon f(\varepsilon z)+f\left(\varepsilon^2 z\right)=g^2(\varepsilon z)\ (2)$$

$$\varepsilon f\left(\varepsilon^2 z\right)+f(z)=g^2\left(\varepsilon^2 z\right)\ (3)$$

La relația (3) adunăm relația (2) înmulțită cu $-\varepsilon$ și obținem

$$-\varepsilon^2 f(\varepsilon z)+f(z)=g^2\left(\varepsilon^2 z\right)-\varepsilon g^2(\varepsilon z)\ (4)$$

.... **3p**

La relația (4) adunăm relația (1) înmulțită cu ε^2 și obținem

$\left(1+\varepsilon^3\right)f(z)=g^2\left(\varepsilon^2 z\right)-\varepsilon g^2(\varepsilon z)+\varepsilon^2 g^2(z)$, adică

$2f(z)=\left(\varepsilon^2 z-\varepsilon\right)^2-\varepsilon(\varepsilon z-\varepsilon)^2+\varepsilon^2(z-\varepsilon)^2=\left(\varepsilon^4-\varepsilon^3+\varepsilon^2\right)z^2-2\left(\varepsilon^3+\varepsilon^3-\varepsilon^3\right)z+\varepsilon^2-\varepsilon^3+\varepsilon^4$

, sau $2f(z)=-2z^2-2z-2$, $f(z)=-\left(z^2+z+1\right)$. **2p**

Problema 2.

Determinați soluțiile reale ale sistemului $\begin{cases} 2^{x^2}+2^{1-y}=3 \\ 2^{y^2}+2^{1-x}=3 \end{cases}$.

Nicolae Bourbăcuț, Sarmizegetuza, G.M. 12/2025

Soluție:

Oficiu ………………………………………………………………………………….. 1p

Din prima ecuație, avem $3=2^{x^2}+2^{1-y}\geq 1+2^{1-y}$, adică $2^{1-y}\leq 2$, de unde $y\geq 0$. Analog din a doua ecuație $x\geq 0$. Deci $x,y\in[0,\infty)$. ………………………………………………………… 1p

Din cele două ecuații prin scădere obținem $f(x)=f(y)$, unde $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{x^2}-2^{1-x}$. Pentru $0\leq x_1<x_2$, avem $2^{x_1^2}<2^{x_2^2}$, $-2^{1-x_1}<-2^{1-x_2}$, adică $f(x_1)<f(x_2)$, ceea ce înseamnă că funcția este strict crescătoare, deci și injectivă. Rezultă atunci că $x=y$.
…………………………………………………………………………………………………… 3p

Atunci, avem de rezolvat ecuația $2^{x^2}+2^{1-x}=3$ sau $g(x)=3$, unde $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2^{x^2}+2^{1-x}=g_1(x)+g_2(x)$. Cum funcția exponențială este convexă, atunci $g_2(x)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$ este convexă. Cum funcția $h:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=2^x$ este convexă, avem

$$2^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}\leq \lambda 2^{x_1}+(1-\lambda)2^{x_2},\ \forall x_1,x_2\geq 0,\ \forall\lambda\in[0,1]\quad (*)$$

Cum $x_1,x_2\geq 0$, atunci $x_1=a^2$, $x_2=b^2$ și relația (*) devine $2^{\lambda a^2+(1-\lambda)b^2}\leq \lambda 2^{a^2}+(1-\lambda)2^{b^2}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall\lambda\in[0,1]$. Se arată că $(\lambda a+(1-\lambda)b)^2\leq \lambda a^2+(1-\lambda)b^2$ (prin calcul echivalentă cu $\lambda(1-\lambda)(a-b)^2\geq 0$) și atunci avem $2^{(\lambda a+(1-\lambda)b)^2}\leq 2^{\lambda a^2+(1-\lambda)b^2}\leq \lambda 2^{a^2}+(1-\lambda)2^{b^2}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall\lambda\in[0,1]$, ceea ce înseamnă că funcția $g_1(x)=2^{x^2}$ este convexă. (Eventual se arată că $2^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\leq 2^{\frac{a^2+b^2}{2}}\leq\frac{2^{a^2}+2^{b^2}}{2}$, $\forall a,b\geq 0$) …. ……………………………………………………… 3p

Atunci funcția g este convexă și prin urmare ecuația $g(x)=3$ are cel mult două soluții. Cum $g(0)=g(1)=3$, rezultă că ecuația $g(x)=3$ are soluțiile $x=0$, $x=1$ și atunci soluțiile sistemului sunt $(x,y)\in\{(0,0),(1,1)\}$. ………………………………………………………… 2p

Problema 3.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale strict crescător cu $a_1>0$ care are proprietatea că $a_n+a_{n+2}\leq 2a_{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Dacă $a_1=1$, $a_2=2$ și toți termenii șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ sunt numere naturale, determinați șirul $(a_n)_{n\geq 1}$.

b) Dacă $p \geq 2$ este număr natural, calculați

$$\left[\frac{\sqrt[p]{a_1}+\sqrt[p]{a_3}}{\sqrt[p]{a_2}}+\frac{\sqrt[p]{a_2}+\sqrt[p]{a_4}}{\sqrt[p]{a_3}}+\frac{\sqrt[p]{a_3}+\sqrt[p]{a_5}}{\sqrt[p]{a_4}}+\ldots+\frac{\sqrt[p]{a_n}+\sqrt[p]{a_{n+2}}}{\sqrt[p]{a_{n+1}}}\right],\ n\in\mathbb{N}^*.$$

($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a)

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție:

Oficiu ……………………………………………………………………………….. 1p

a) Din $a_n+a_{n+2}\leq 2a_{n+1}$, avem $a_{n+2}-a_{n+1}\leq a_{n+1}-a_n$ și, notând $b_n=a_{n+1}-a_n$, rezultă că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Atunci din $b_n\leq b_1=1$, $b_n>0$ (șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător) și $b_n\in\mathbb{N}$ rezultă $b_n=1$, $\forall n\geq 1$, adică $a_{n+1}=a_n+1$ și imediat $a_n=n$, $\forall n\geq 1$ .... …………. 3p

Soluție alternativă: Din $a_1+a_3\leq 2a_2$, rezultă $a_3\leq 3$ și cum șirul este strict crescător iar $a_3\in\mathbb{N}$, rezultă $a_3=3$. Prin inducție se arată că $a_n=n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Avem

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[p]{a_k}+\sqrt[p]{a_{k+2}}}{\sqrt[p]{a_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[p]{a_k}}{\sqrt[p]{a_{k+1}}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[p]{a_{k+2}}}{\sqrt[p]{a_{k+1}}}=\frac{\sqrt[p]{a_1}}{\sqrt[p]{a_2}}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\sqrt[p]{a_k}}{\sqrt[p]{a_{k+1}}}+\frac{\sqrt[p]{a_{k+1}}}{\sqrt[p]{a_k}}\right)+\frac{\sqrt[p]{a_{n+2}}}{\sqrt[p]{a_{n+1}}}.$$ Cum

$\dfrac{\sqrt[p]{a_k}}{\sqrt[p]{a_{k+1}}}+\dfrac{\sqrt[p]{a_{k+1}}}{\sqrt[p]{a_k}}\geq 2$ (inegalitatea mediilor) și $\dfrac{\sqrt[p]{a_1}}{\sqrt[p]{a_2}}+\dfrac{\sqrt[p]{a_{n+2}}}{\sqrt[p]{a_{n+1}}}>\dfrac{\sqrt[p]{a_{n+2}}}{\sqrt[p]{a_{n+1}}}>1$ (pentru că șirul este strict crescător) atunci $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[p]{a_k}+\sqrt[p]{a_{k+2}}}{\sqrt[p]{a_{k+1}}}>2(n-1)+1=2n-1$. ……………..................………….. 2p

Demonstrăm că $\dfrac{\sqrt[p]{a_k}+\sqrt[p]{a_{k+2}}}{\sqrt[p]{a_{k+1}}}<2$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$. Folosind inegalitatea

$(a+b)^p<2^{p-1}\left(a^p+b^p\right)$, $a,b>0$, $a\neq b$ (se demonstrează prin inducție după $p\in\mathbb{N}^*$, $p\geq 2$ sau folosind convexitatea funcției $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=x^p$), inegalitate care se mai scrie $a+b<\sqrt[p]{2^{p-1}\left(a^p+b^p\right)}$, avem $\sqrt[p]{a_k}+\sqrt[p]{a_{k+2}}<\sqrt[p]{2^{p-1}\left(a_k+a_{k+2}\right)}$. Cum $a_k+a_{k+2}\leq 2a_{k+1}$, atunci $\sqrt[p]{a_k}+\sqrt[p]{a_{k+2}}<\sqrt[p]{2^p a_{k+1}}=2\sqrt[p]{a_{k+1}}$. Deci avem

$\dfrac{\sqrt[p]{a_k}+\sqrt[p]{a_{k+2}}}{\sqrt[p]{a_{k+1}}}<2$ și imediat $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[p]{a_k}+\sqrt[p]{a_{k+2}}}{\sqrt[p]{a_{k+1}}}<2n$. ……………….......................…………….. 3p

Rezultă în final că $\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[p]{a_k}+\sqrt[p]{a_{k+2}}}{\sqrt[p]{a_{k+1}}}\right]=2n-1$. ………………......................……………….. 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a IX-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1.

Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, *definită prin* $f(n)=\left[\frac{n}{2}\right]$.

a) *Dacă șirul de numere naturale* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este o progresie aritmetică astfel încât șirul* $(f(a_n))_{n\geq 1}$ *este progresie aritmetică, atunci arătați că toți termenii șirului* $(a_n)_{n\geq 1}$ *au aceeași paritate.*

b) *Determinați numerele naturale nenule* m,n,p *știind că* $f(n^3)=p^m$ *și* p *este prim.*

c) *Determinați funcțiile* $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *care pentru orice* $n\in\mathbb{N}$ *verifică relațiile* $g(n)\leq f(n)$, $g(n+1)>g(n)-\frac{1+(-1)^n}{2}$.

($[a]$ *reprezintă partea întreagă a numărului real* a*)*

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție:

Oficiu ………………………………………………………………………………….. 1p

a) Fie $r\in\mathbb{N}$ rația progresiei $(a_n)_{n\geq 1}$. Cum șirul $(f(a_n))_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică, atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $f(a_n)+f(a_{n+2})=2f(a_{n+1})$, adică $\left[\frac{a_n}{2}\right]+\left[\frac{a_n+2r}{2}\right]=2\left[\frac{a_n+r}{2}\right]$ sau $2\left[\frac{a_n}{2}\right]+r=2\left[\frac{a_n+r}{2}\right]$, de unde rezultă că r, este număr par. Așadar rația progresiei $(a_n)_{n\geq 1}$ este număr par și atunci toți termenii au aceeași paritatea (aceeași paritate cu a_1).

……………………………………………………………………………………………….. **2p**

b) Din $f(n^3)=p^m$, adică $\left[\frac{n^3}{2}\right]=p^m$ avem $p^m\leq\frac{n^3}{2}<p^m+1\Leftrightarrow 2p^m\leq n^3<2p^m+2$, de unde $n^3\in\{2p^m,2p^m+1\}$. ……………………………………………… **1p**

Dacă $n^3=2p^m$ rezultă că $p=2$ și din $n^3=2^{m+1}$ rezultă că $m=3k-1$ și $n=2^k$, $k\in\mathbb{N}^*$.

Dacă $n^3=2p^m+1$, avem $n^3-1=2p^m$, adică $(n-1)(n^2+n+1)=2p^m$. Fie $d=(n-1,n^2+n+1)=(n-1,(n-1)(n+2)+3)$ (d este c.m.m.d.c.) și atunci $d|3$, deci $d\in\{1,3\}$

.

Pentru $d=1$ din $(n-1)(n^2+n+1)=2p^m$, n^2+n+1 număr impar, $n-1<n^2+n+1$, avem $n-1=2$ și $n^2+n+1=p^m$ și atunci $n=3$, $p^m=13$, adică $p=13$, $m=1$.
Pentru $d=3$, rezultă $3^2 \mid 2p^m$, deci $p=3$ și atunci din $(n-1)(n^2+n+1)=2\cdot 3^m$, n^2+n+1 număr impar, $d=3$, $n-1<n^2+n+1$, avem $n-1=6$ și $n^2+n+1=3^{m-1}$ și atunci $n=7$, $3^{m-1}=57$, care nu are soluții naturale. **2p**

c) Avem $g(0)\le f(0)=0$ și cum $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, rezultă $g(0)=0$. De asemenea $g(1)\le f(1)=0$, deci $g(1)=0$. Avem $g(2)\le f(2)=1$ și $g(2)>g(1)-\frac{1-1}{2}=0$. Din $g(2)\in(0,1]\cap\mathbb{N}$ rezultă $g(2)=1$. În mod analog $g(3)\le f(3)=1$ și $g(3)>g(2)-\frac{1+1}{2}=1-1=0$, rezultă $g(3)=1$.

.... **1p**

Demonstrăm prin inducție că $g(n)=\begin{cases} p, \, dacă \; n=2p, \; p\in\mathbb{N} \\ p, \, dacă \; n=2p+1, \; p\in\mathbb{N}\end{cases}=\left[\frac{n}{2}\right]$. Pentru $p=0$ avem $g(0)=g(1)=0$. Presupunem că $g(2p)=g(2p+1)=p$ și demonstrăm că $g(2p+2)=g(2p+3)=p+1$. Avem $g(2p+2)\le f(2p+2)=p+1$ și $g(2p+2)>g(2p+1)-\frac{1-1}{2}=p-0=p$ și cum $g(2p+2)\in\mathbb{N}$ rezultă $g(2p+2)=p+1$. De asemenea $g(2p+3)\le f(2p+3)=p+1$ și $g(2p+3)>g(2p+2)-\frac{1+1}{2}=p+1-1=p$ și deci $g(2p+3)=p+1$. Așadar $g(2p)=g(2p+1)=p$ adică $g(n)=\left[\frac{n}{2}\right]=f(n)$. **3p**

Problema 2.

Fie triunghiul ABC și $D\in(BC)$ astfel încât $BC=3\cdot BD$. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și M simetricul lui I față de D. Știind că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, arătați că ABC este echilateral.

Petru Todor, Sebeș, G.M. 1/2026

Soluție 1:

Oficiu **1p**
Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Folosind relația lui Leibniz $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$, relația din enunț devine

$$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{MG}=\vec{0} \quad (1)$$

.... **2p**

Din $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$ rezultă $\overrightarrow{MD}=\frac{\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{3}$. Deoarece D este mijlocul lui (MI),

avem $\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MD}=\frac{4\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}}{3}$ sau $3\overrightarrow{MI}=4\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$. **3p**

Avem $3\overrightarrow{MI}=2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)+2\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right)=6\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{AB}$, deci $2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{MI}-6\overrightarrow{MG}$

.... **2p**

Înlocuind în (1), obținem $3\overrightarrow{MI}-6\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{MG}=\vec{0}$, de unde $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MG}$, sau $I=G$, adică triunghiul este echilateral.. **2p**

Soluție 2:

Oficiu 1p

Notăm $\overrightarrow{r_P}$ vectorul de poziție al punctului P și avem în general $\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{r_T}-\overrightarrow{r_S}$.

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și atunci $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}$. Scriem relația din enunț cu vectori de poziție $\sum\left(\overrightarrow{r_A}-\overrightarrow{r_M}\right)+2\left(\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}\right)=\vec{0}$, adică

$$3\left(r_G-r_M\right)+2\left(r_B-r_A\right)=\vec{0}\ (1)$$

.... **2p**

Din $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$ rezultă $\overrightarrow{r_D}=\frac{\overrightarrow{r_B}+\frac{1}{2}\overrightarrow{r_c}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}$. Deoarece D este mijlocul lui (MI), avem

$\overrightarrow{r_M}=2\overrightarrow{r_D}-\overrightarrow{r_I}=2\frac{2\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}-\overrightarrow{r_I}$ sau $3\overrightarrow{r_M}=4\overrightarrow{r_B}+2\overrightarrow{r_C}-3\overrightarrow{r_I}$ **3p**

Înlocuind în (1), avem $3r_G-\left(4\overrightarrow{r_B}+2\overrightarrow{r_C}-3\overrightarrow{r_I}\right)+2\left(r_B-r_A\right)=\vec{0}$ **1p**

Avem $3r_G+3\overrightarrow{r_I}-2\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}+r_A\right)=\vec{0}$, adică $3r_G+3\overrightarrow{r_I}-6r_G=\vec{0}$, de unde $r_G=\overrightarrow{r_I}\Leftrightarrow G=I$, deci triunghiul ABC este echilateral. **3p**

Problema 3.

Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ *cu* $a+b+c=1$. *Demonstrați inegalitatea* $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+18abc\le 1$.

Marin Ionescu, Pitești

Soluție:

Oficiu 1p

Folosind inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ (inegalitate care este echivalentă cu $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ sau $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$) avem

$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ **3p**

Cum $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = a+b+c-\frac{2(ab+bc+ac)}{a+b+c} = a+b+c-\frac{2abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{a+b+c}$, avem

$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = a+b+c-\frac{2abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{a+b+c}$. **2p**

Deoarece $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 9$ atunci

$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = a+b+c-\frac{2abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{a+b+c} \leq a+b+c-\frac{18abc}{(a+b+c)^2}$.

.... **3p**

Așadar $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+\frac{18abc}{(a+b+c)^2} \leq a+b+c$, iar cum $a+b+c=1$ obținem inegalitatea din enunț. **1p**

Soluție alternativă: Omogenizăm inegalitatea din enunț: $a=\frac{x}{x+y+z}$, $b=\frac{y}{x+y+z}$, $c=\frac{z}{x+y+z}$, $x,y,z \in (0,\infty)$. Inegalitatea de demonstrat devine

$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3(x+y+z)^2}}+\frac{18xyz}{(x+y+z)^3} \leq 1$ sau $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}+\frac{18xyz}{(x+y+z)^2} \leq x+y+z$, care se demonstrează ca mai înainte.

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a VIII-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1.

a) *Demonstrați că dacă* $a,b\in\mathbb{R}$ *și m și n sunt numere naturale cu aceeași paritate, atunci*

$$\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2}\le\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}.$$

b) *Demonstrați că* $\frac{a^{100}+b^{100}}{2}\ge\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{50}$ *oricare ar fi* $a,b\in\mathbb{R}$.

Soluție.

Oficiu 1p

a) Se rescrie inegalitatea sub forma $\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)\ge 0$ 2p

Dacă *m* și *n* sunt impare, atunci

- pentru $a\ge b\Rightarrow a^m\ge b^m, a^n\ge b^n\Rightarrow a^m-b^m\ge 0, a^n-b^n\ge 0\Rightarrow\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)\ge 0$
- pentru $a<b\Rightarrow a^m<b^m, a^n<b^n\Rightarrow a^m-b^m<0, a^n-b^n<0\Rightarrow\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)>0$ 2p

Dacă *m* și *n* sunt pare, atunci $m=2k_1$, $n=2k_2$, cu k_1, $k_2\in\mathbb{N}$

- pentru $a^2\ge b^2\Rightarrow a^{2k_1}\ge b^{2k_1}, a^{2k_2}\ge b^{2k_2}\Rightarrow a^m\ge b^m, a^n\ge b^n\Rightarrow\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)\ge 0$
- pentru $a^2<b^2\Rightarrow a^{2k_1}<b^{2k_1}, a^{2k_2}<b^{2k_2}\Rightarrow a^m<b^m, a^n<b^n\Rightarrow\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)>0$ 2p

b) Folosim inegalitatea de la a) pentru *m* și *n* pare

$$\frac{a^{100}+b^{100}}{2}\ge\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^{98}+b^{98}}{2}$$

$$\frac{a^{98}+b^{98}}{2}\ge\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^{96}+b^{96}}{2}$$

....

$$\frac{a^4+b^4}{2}\ge\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}$$

Înmulțim relațiile și obținem inegalitatea cerută...3p

Problema 2.

Fie a, b, c numere reale nenule, distincte două câte două și d un număr real. Să se demonstreze că ecuațiile $ax^2+\left(b+d\right)x+c=0$, $bx^2+\left(c+d\right)x+a=0$, $cx^2+\left(a+d\right)x+b=0$ *au o soluție comună dacă și numai dacă* $a+b+c+d=0$.

Soluție.

Oficiu ………….........................…………………………………………………………….. 1p

Demonstrăm implicația directă. Fie x_0 soluția reală comună, atunci

$ax_0^2+(b+d)x_0+c=0,\ bx_0^2+(c+d)x_0+a=0,\ cx_0^2+(a+d)x_0+b=0$

Scad primele două relații $\Rightarrow$

$(a-b)x_0^2+(b-c)x_0+c-a=0 \Rightarrow a(x_0^2-1)-bx_0(x_0-1)-c(x_0-1)=0 \Rightarrow$

$(x_0-1)(ax_0+a-bx_0-c)=0 \Rightarrow x_0=1$ sau $x_0=\dfrac{c-a}{a-b}$.

Scad prima și a treia relație $\Rightarrow$

$(a-c)x_0^2+(b-a)x_0+c-b=0 \Rightarrow ax_0(x_0-1)+b(x_0-1)-c(x_0^2-1)=0 \Rightarrow$

$(x_0-1)(ax_0+b-cx_0-c)=0 \Rightarrow x_0=1$ sau $x_0=\dfrac{c-b}{a-c}$

Scad a doua și a treia relație $\Rightarrow$

$(b-c)x_0^2+(c-a)x_0+a-b=0 \Rightarrow b(x_0^2-1)-cx_0(x_0-1)-a(x_0-1)=0 \Rightarrow$

$(x_0-1)(bx_0+b-cx_0-a)=0 \Rightarrow x_0=1$ sau $x_0=\dfrac{a-b}{b-c}$ 3p

Presupun că în afara rădăcinii comune $x_0=1$, mai există o rădăcină comună ceea ce înseamnă

$\dfrac{c-a}{a-b}=\dfrac{c-b}{a-c}=\dfrac{a-b}{b-c} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\Rightarrow a=b, b=c, c=a$, ceea ce contrazice faptul că a, b, c sunt, distincte două câte două !.........2p

Cum $x_0=1$ este rădăcina comună $\Rightarrow a+b+c+d=0$.

Reciproc, dacă $a+b+c+d=0 \Rightarrow b+d=-(a+c), c+d=-(a+b), a+d=-(b+c)$ 1p

atunci ecuațiile se rescriu

$ax^2-(a+c)x+c=0$ cu soluțiile $x_1=1,\ x_2=\dfrac{c}{a}$

$bx^2-(b+a)x+a=0$ cu soluțiile $x_1=1,\ x_2=\dfrac{a}{b}$

$cx^2-(c+b)x+b=0$ cu soluțiile $x_1=1,\ x_2=\dfrac{b}{c}$

Deci $x_1=1$ este soluție comună...3p

Problema 3.

Fie $ABCDA'B'C'D'$ *un cub și* M, N, P, Q *mijloacele muchiilor BC, AD, CC', respectiv DD'.*
Notăm $AM \cap BD = \{E\}$, $CN \cap BD = \{F\}$, $DP \cap CD' = \{E'\}$ $C'Q \cap CD' = \{F'\}$.

a) *Demonstrați că* $EE' = FF'$ *și* $EE' \parallel (AC'Q)$.

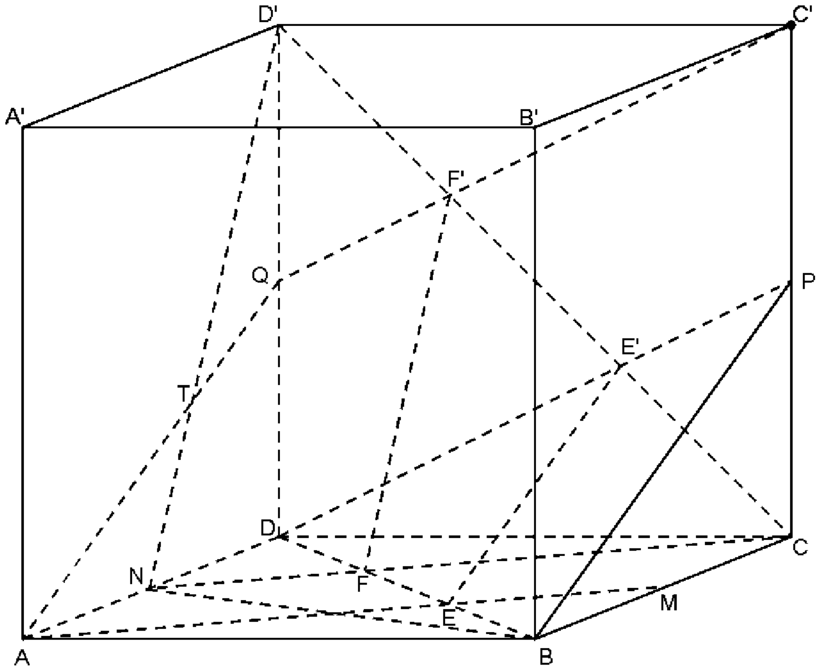
b) *Determinați sinusul unghiului format de dreptele* EE' *și* FF'.

c) *Fie G centrul de greutate al triunghiului ABD. Demonstrați că* $EE' \parallel (GFF')$.

Gazeta Matematică nr.1/2026

Soluție.

Oficiu 1p



a) $\triangle CE'P \sim \triangle D'E'D \Rightarrow \dfrac{CE'}{D'E'} = \dfrac{E'P}{E'D} = \dfrac{CP}{D'D} = \dfrac{1}{2}$

$\triangle DFN \sim \triangle BFC \Rightarrow \dfrac{DF}{BF} = \dfrac{DN}{BC} = \dfrac{FN}{FC} = \dfrac{1}{2}$

$\triangle MEB \sim \triangle AED \Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MB}{AD} = \dfrac{EB}{ED} = \dfrac{1}{2}$

$\triangle D'F'Q \sim \triangle CF'C' \Rightarrow \dfrac{D'F'}{CF'} = \dfrac{D'Q}{CC'} = \dfrac{F'Q}{F'C'} = \dfrac{1}{2}$ 1p

În $\triangle DBP$

$$\frac{E'P}{E'D} = \frac{EB}{ED} = \frac{1}{2} \Rightarrow EE' \parallel BP \Rightarrow \triangle DEE' \sim \triangle DBP \Rightarrow EE' = \frac{2}{3}PB \Rightarrow EE' = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$$

În $\triangle D'CN$,

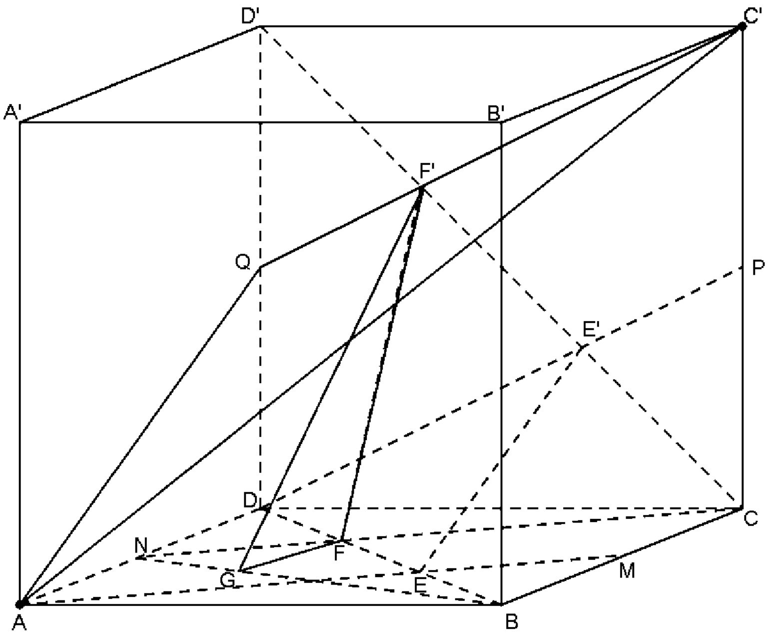
$$\frac{D'F'}{F'C}=\frac{NF}{FC}=\frac{1}{2}\Rightarrow F'F \parallel D'N \Rightarrow \triangle CFF' \sim \triangle CND' \Rightarrow FF'=\frac{2}{3}ND' \Rightarrow FF'=\frac{2a\sqrt{5}}{3}$$

$\Rightarrow EE' \equiv FF'$ 1p

S-a notat muchia cubului, $AB=2a,\ a\in\mathbb{R}, a>0$.

$EE' \parallel BP$, dar $BP \parallel AQ \Rightarrow EE' \parallel AQ$

$$\left.\begin{array}{c} EE' \parallel AQ \\ AQ \subset (AC'Q) \end{array}\right\} \Rightarrow EE' \parallel (AC'Q)$$ 1p



b) $\left.\begin{array}{c} EE' \parallel AQ \\ FF' \parallel D'N \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle(EE',FF')=\measuredangle(AQ,D'N)=\measuredangle ATN$, unde $AQ \cap D'N=\{T\}$ 1p

Se scrie aria triunghiului ATN în două moduri și se obține $\sin(\measuredangle ATN)=\frac{3}{5}$ 1p

Exemplu de calcul: se notează $AB=2a,\ a\in\mathbb{R},\ a>0,\ D'N=a\sqrt{5}$

$\triangle D'ND, A-T-Q \Rightarrow \frac{D'T}{NT}\cdot\frac{NA}{DA}\cdot\frac{DQ}{D'Q}=1$

sau T este centru de greutate în $\triangle ADD' \Rightarrow D'T=2NT$.

$$TN=\frac{a\sqrt{5}}{3}, AT=D'T=\frac{2a\sqrt{5}}{3}, A_{ANT}=\frac{a^2}{3} \text{ și } A_{ANT}=\frac{\frac{2a\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{3}\cdot\sin(\measuredangle ATN)}{2}$$ 1p

$\Rightarrow \sin(\measuredangle ATN)=\frac{3}{5}$.

c) BN mediană în $\triangle BND$, G este centrul de greutate $\Rightarrow \frac{BG}{GN}=2$

Dar $\dfrac{BF}{FD}=2\Rightarrow\dfrac{BF}{FD}=\dfrac{BG}{GN}\Rightarrow GF\parallel ND$ 1p

$(GFF')\parallel(NDD')$, $AQ\subset(NDD')\Rightarrow AQ\parallel(GFF')$ dar $AQ\parallel EE'\Rightarrow EE'\parallel(GFF')$.................2p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a VII-a

Bareme de evaluare şi notare

Problema 1.

Pentru orice număr natural nenul k, *demonstrați că numărul* $\sqrt{1+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4k^2}}$ *este rațional.*

Gazeta Matematică nr. 1/2026

Soluție.

Oficiu **1p**

$$1+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4k^2}=\left(1+2\cdot 1\cdot\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k^2}\right)-\frac{1}{k}+\frac{1}{(2k+1)^2}=\left(1+\frac{1}{2k}\right)^2+\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{1}{k}$$ 3p

$$=\left[\left(1+\frac{1}{2k}\right)^2-2\cdot\left(1+\frac{1}{2k}\right)\left(\frac{1}{2k+1}\right)+\frac{1}{(2k+1)^2}\right]+2\left(1+\frac{1}{2k}\right)\left(\frac{1}{2k+1}\right)-\frac{1}{k}$$ 3p

$$\left(1+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)^2+2\cdot\frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{k}=\left(1+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)^2+\frac{1}{k}-\frac{1}{k}=\left(1+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)^2$$ 3p

Problema 2.

a) *Demonstrați că*

$$\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{4^2+1}{4^2-1}+\ldots+\frac{2026^2+1}{2026^2-1}>2026$$

b) *Demonstrați că pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$ *are loc inegalitatea*

$$\left[\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+2n+2}\right]+\left[\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+4n+5}\right]+\ldots+\left[\sqrt{4n^2-1}+\sqrt{4n^2+1}\right]\geq 6n-3$$

S-a notat cu $[a]$, partea întreagă a numărului real a.

Soluție.

Oficiu **1p**

a) Un termen oarecare al sumei este de forma

$T_k = \frac{k^2+1}{k^2-1} = 1 + \frac{2}{k^2-1} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$, $2 \le k \le 2026$ ……..1p

Membrul stâng al inegalității se scrie acum astfel

$2025 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2026} + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2027} = 2026 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2026} - \frac{1}{2027}$ 1p

$\frac{1}{2} > \frac{1}{2026} + \frac{1}{2027} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2026} - \frac{1}{2027} > 0$

$\Rightarrow 2026 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2026} - \frac{1}{2027} > 2026$ 1p

b) Notez suma din membrul stâng cu S și un termen oarecare al său este de forma

$T_k = \left[\sqrt{k^2+2k} + \sqrt{k^2+2k+2}\right]$, $n \le k \le 2n-1$

$k < \sqrt{k^2+2k}$, $k+1 < \sqrt{k^2+2k+2}$

Adunând relațiile obținem $2k+1 < \sqrt{k^2+2k} + \sqrt{k^2+2k+2}$ (1)..1p

Se demonstrează că $\sqrt{k^2+2k} + \sqrt{k^2+2k+2} < 2(k+1)$ (2)..2p

Din relațiile (1) și (2) obținem $\left[\sqrt{k^2+2k} + \sqrt{k^2+2k+2}\right] = 2k+1$ 1p

Suma se scrie $S = (2n+1) + (2n+3) + ... + (4n-1) \Rightarrow S = 3n^2$

$S \ge 6n-3 \Leftrightarrow 3n^2 \ge 6n-3 \Leftrightarrow 3(n-1)^2 \ge 0$ 2p

Problema 3.

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AC > AB$ și cercul circumscris acestuia. Semidreapta AI este bisectoarea unghiului BAC, $I \in BC$. AI intersectează cercul a doua oară în punctul E. Tangentele la cerc în punctele E și C se intersectează în punctul F, iar AE și CF se intersectează în punctul N.

a) *Demonstrați că* $\frac{1}{CN} + \frac{1}{CI} = \frac{1}{CF}$.

b) *Dacă punctul M este mijlocul laturii BC și $K \in AC$ astfel încât $MK \parallel AI$, atunci să se demonstreze că $2AK = AC - AB$.*

Soluție.

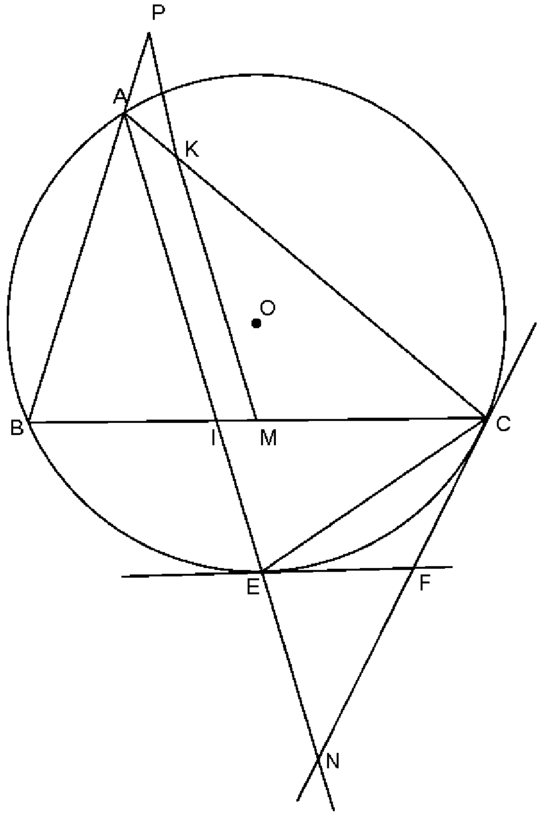
Oficiu ……….. 1p

a) AI este bisectoarea $\measuredangle BAC \Rightarrow \measuredangle BAI = \measuredangle CAI \Rightarrow BE = CE \Rightarrow \measuredangle BCE = \measuredangle ECF$ (1)

$FE = FC \Rightarrow \triangle CEF$ este isoscel $\Rightarrow \measuredangle CEF = \measuredangle ECF$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \measuredangle BCE = \measuredangle CEF \Rightarrow EF \parallel IC \Rightarrow \triangle NEF \sim \triangle NIC \Rightarrow \frac{NF}{NC} = \frac{EF}{IC} = \frac{NE}{NI}$

$\Rightarrow \frac{CI}{EF} = \frac{NI}{NE}$, dar $EF = FC \Rightarrow \frac{CI}{FC} = \frac{NI}{NE}$ 2p



În $\triangle ICN, CE$ bisectoare $\Rightarrow \frac{IE}{EN} = \frac{IC}{CN}$

$\frac{CI}{CN} + 1 = \frac{IE}{EN} + \frac{EN}{EN} = \frac{IN}{EN} = \frac{CI}{CF} \Rightarrow \frac{CI}{CN} + 1 = \frac{CI}{CF} \Rightarrow \frac{1}{CN} + \frac{1}{CI} = \frac{1}{CF}$ 2p

b) Fie $MK \cap AB = \{P\}$.

În $\triangle BMP$, $MP \parallel IA \Rightarrow \frac{BA}{BP} = \frac{BI}{BM} \Rightarrow BP = \frac{BA \cdot BM}{BI}$ (3)

În $\triangle CAI$, $MK \parallel IA \Rightarrow \frac{CA}{CK} = \frac{CI}{CM} \Rightarrow CK = \frac{CA \cdot CM}{CI}$ (4)

În $\Delta ABC, AI$ bisectoare $\Rightarrow \frac{CA}{CI} = \frac{BA}{BI}$ (5)

M este mijlocul lui $BC \Rightarrow BM = CM$ (6)

Din (3), (4), (5) și (6) $\Rightarrow BP = CK \Rightarrow BA + AP = AC - AK \Rightarrow AP + AK = AC - AB$ 3p

$\measuredangle BAI = \measuredangle APK$ (corespondente) , $\measuredangle IAK = \measuredangle PKA$ (alterne interne)

Dar $\measuredangle BAI = \measuredangle IAK \Rightarrow \measuredangle APK = \measuredangle PKA \Rightarrow \triangle APK$ isoscel $\Rightarrow AK = AP$

$\Rightarrow AP + AK = 2AK \Rightarrow 2AK = AC - AB$ 2p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a VI-a

Bareme de evaluare şi notare

Problema 1.

Fie $a,b\in\mathbb{N}^*$, (a,b) *= cel mai mare divizor comun al numerelor* a *și* b*, iar* $[a,b]$ *= cel mai mic multiplu comun al numerelor* a *și* b.

a) *Se știe că* $(a,b)+[a,b]=100$. *Determinați toate perechile* (a,b) *pentru care unul dintre numere îl divide pe celălalt.*

b) *Demonstrați că* $(a,b)^2+[a,b]^2\geq a^2+b^2$.

Soluție:

Oficiu 1p

a) Caz I.

Dacă $a|b\Rightarrow(a,b)=a$ şi $[a,b]=b$

Egalitatea devine $a+b=100\Rightarrow b=100-a\Rightarrow a|100-a\Rightarrow a|100\Rightarrow a\in D_{100}$ 1p

Cum $b=100-a\Rightarrow(a,b)\in\{(1,99),(2,98),(4,96),(5,95),(10,90),(20,80),(25,75),(50,50)\}$

....1p

Caz II

Dacă $b|a\Rightarrow(a,b)=b$ şi $[a,b]=a$

Egalitatea devine $a+b=100\Rightarrow a=100-b$, dar $b\,|\,a\Rightarrow b\,|\,100$ 1p

$\Rightarrow(a,b)\in\{(99,1),(98,2),(96,4),(95,5),(90,10),(80,20),(75,25),(50,50)\}$

Din I şi II $\Rightarrow(a,b)\in\{(99,1),(98,2),(96,4),(95,5),(90,10),(80,20),(75,25),(50,50),$

$(1,99),(2,98),(4,96),(5,95),(10,90),(20,80),(25,75)\}$ 1p

b) $(a,b)=d\Rightarrow a=d\cdot a_1,\ b=d\cdot b_1,\ d,\ a_1,\ b_1\in\mathbb{N}^*,\ (a_1,b_1)=1$

$\Rightarrow[a,b]=\dfrac{a\cdot b}{d}=\dfrac{d\cdot a_1\cdot d\cdot b_1}{d}=d\cdot a_1\cdot b_1$

$\Rightarrow a^2+b^2=d^2a_1^2+d^2b_1^2$ 1p

Atunci relația din enunț se scrie:

$d^2 + d^2 a_1^2 b_1^2 \geq d^2 a_1^2 + d^2 b_1^2 \ |: d^2$

$1 + a_1^2 b_1^2 \geq a_1^2 + b_1^2 \Leftrightarrow a_1^2 b_1^2 - a_1^2 - b_1^2 + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow a_1^2(b_1^2 - 1) - (b_1^2 - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a_1^2 - 1)(b_1^2 - 1) \geq 0$

....3p

Cum $a_1 \geq 1, b_1 \geq 1 \Rightarrow$ relația este adevărată..1p

Problema 2.

Pe bilele dintr-o urnă sunt scrise numerele naturale cuprinse între 2^{10} și 2^{11}. Se extrage o bilă. Aflați probabilitatea ca numărul scris pe aceasta să aibă trei divizori.

Gazeta Matematică nr. 1/2026

Soluție:

Oficiu 1p

Fie n număr natural cuprins între 2^{10} și 2^{11}, având trei divizori

n are trei divizori $\Rightarrow n = p^2, p \in \mathbb{N}^*, p$ prim...2p

$D_n = \{1, p, p^2\}$..1p

$2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048$, n număr natural cuprins între 2^{10} și $2^{11} \Rightarrow 1024 < n < 2048$...........1p

$\Rightarrow 1024 < p^2 < 2048$

$\Rightarrow 32^2 < p^2 < 46^2, p$ prim...1p

$\Rightarrow p \in \{37, 41, 43\}$ (trei cazuri favorabile)..2p

$2047 - 1025 + 1 = 1023$ numere cuprinse între 1024 și 2048 $\Rightarrow 1023$ cazuri posibile...............1p

$\Rightarrow P = \dfrac{3}{1023}$ 1p

Problema 3.

Pe o dreaptă d se consideră punctele $O, M_1, M_2, ..., M_n$ în această ordine, cu $n \in \mathbb{N}^*$. *Fie punctul P exterior dreptei d astfel încât măsura unghiului $\sphericalangle POM_1$ este egală cu 120^o iar măsurile unghiurilor $\sphericalangle OPM_1, \sphericalangle OPM_2, ..., \sphericalangle OPM_n$, respectiv măsurile unghiurilor $\sphericalangle PM_1O, \sphericalangle PM_2O, ..., \sphericalangle PM_nO$, sunt numere prime diferite (exprimate în grade).*

a) *Aflați valoarea maximă a lui n.*

b) *Dacă* n *are valoare maximă, arătați că oricum am alege patru dintre unghiurile* $\sphericalangle M_1PM_2, \sphericalangle M_2PM_3, ..., \sphericalangle M_{n-1}PM_n$, *există printre ele două congruente.*

Soluție:

Oficiu 1p

a) În $\triangle OPM_i$, $180^0 - \sphericalangle POM_i = 60^0 = \sphericalangle OPM_i + \sphericalangle OM_iP$, $1 \le i \le n$ (suma măsurilor a două unghiuri exprimate prin numere prime) 1p

Numere prime mai mici decât 60:
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59..1p

Cum suma măsurilor a două unghiuri exprimate prin numere prime (în grade) este 60^0, atunci perechile care convin sunt:

$(7^0,53^0),(13^0,47^0),(17^0,43^0),(19^0,41^0),(23^0,37^0),(29^0,31^0),(31^0,29^0)(37^0,23^0),$
$(41^0,19^0),(43^0,17^0),(47^0,13^0),(53^0,7^0)$ 1p

$\Rightarrow n = 12$ valoare maximă 1p

b) $n = 12$

Se observă că $\sphericalangle M_iPM_{i+1} = \sphericalangle OPM_{i+1} - \sphericalangle OPM_i$, $1 \le i \le n-1$ 1p

Cum este evident că unghiurile $\sphericalangle OPM_i$ sunt în ordine crescătoare, atunci se caută diferențele dintre numerele prime:
$13-7=4$, $17-13=4$, $19-17=2$, $23-19=4$, $29-23=6$, $....53-47=6$ avem doar trei valori distincte, 2, 4 și 6 ....2p

Sunt 11 unghiuri și trei valori posibile, asta înseamnă că cel puțin două unghiuri din cele patru alese, vor avea măsurile egale (principiul cutiei)..2p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a V-a

Bareme de evaluare şi notare

Problema 1.

Să se determine restul împărțirii lui N prin n în cazurile:

a) $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1020+1+2^2+2^3+\ldots+2^{10}$ *și* $n=2026$;

b) $N=2+2^2+2^3+\ldots+2^{2026}$ *și* $n=63$.

Soluție:

Oficiu 1p

a) Cum $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1020)\vdots 2026$, având printre factorii din produs 2 și 1013, iar $2026=2\cdot 1013$, restul împărțirii lui N prin 2026 va fi restul împărțirii prin 2026 a numărului $s=1+2^2+\ldots+2^{10}$ 2p

$s=1+2^2+\ldots+2^{10}=\left(2^{11}-1\right):\left(2-1\right)-2=2045=2026+19$, $19<2026$, restul cerut este 19…2p

b) Cum $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5=63$, dacă grupăm câte 6 termeni consecutivi în *N*, începând cu termenul 2^k, $k\le 2021$, suma ternenilor dintr-o astfel de grupă va fi $2^k\cdot\left(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5\right)=\left(2^k\cdot 63\right)\vdots 63$ 2p

Dar $2026:6=337$ rest $4\Rightarrow$se vor forma 337 de grupe complete, cu suma termenilor multiplu de 63, şi rămân 4 termeni, primii 4 din sumă, cu suma $2+2^2+2^3+2^4=30$ 2p

Cum 30<63, restul cerut este 30..1p

Problema 2.

Să se compare numerele:

a) $a=3^{22}+3^{21}$ și $b=5^{14}+2^{33}$;

b) $m=5^{13}$ *și* $n=3^{21}-2^{31}$.

Soluție:
Oficiu 1p

$$\left.\begin{array}{l}3^{22}=\left(3^2\right)^{11}=9^{11}>8^{11}=\left(2^3\right)^{11}=2^{33}\\ 3^{21}=\left(3^3\right)^7=27^7>25^7=\left(5^2\right)^7=5^{14}\end{array}\right\}\Rightarrow 3^{22}+3^{21}>2^{33}+5^{14}\Rightarrow a>b$$

....4p

b) Din punctul a) știm că $3^{22}+3^{21}>2^{33}+5^{14}$, iar $3^{22}+3^{21}=3^{21}\cdot(3+1)=4\cdot 3^{21}$..........................2p

$2^{33}+5^{14}=2^2\cdot 2^{31}+5\cdot 5^{13}>4\cdot 2^{31}+4\cdot 5^{13}=4\cdot\left(2^{31}+5^{13}\right)$..2p

Avem deci $4\cdot 3^{21}>4\cdot\left(2^{31}+5^{13}\right)\Rightarrow 3^{21}>2^{31}+5^{13}\Rightarrow 3^{21}-2^{31}>5^{13}\Rightarrow n>m$.....................1p

Problema 3.

Fie numărul $\overline{a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}}$ cu $2n$ cifre nenule. Se știe că orice cifră a numărului situată pe poziție pară este de patru ori mai mare decât precedenta de pe poziția impară (adică este îndeplinită condiția $a_{2k}=4\cdot a_{2k-1}$, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*,k\le n$).

a) Demonstrați că nu există astfel de numere cu suma cifrelor 2026.

b) Determinați cel mai mic și cel mai mare astfel de număr cu suma cifrelor 2025.

Gazeta Matematică nr. 1/2026

Soluție:

Oficiu 1p

Din ipoteză, $a_{2k}=4\cdot a_{2k-1}$ și a_{2k} este cifră nenulă $\Rightarrow a_{2k-1}\in\{1;2\}$, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*,k\le n$ (1)
....2p

Dacă notăm $S=a_1+a_2+...+a_{2n-1}+a_{2n}$, atunci

$$S=a_1+4\cdot a_1+a_3+4\cdot a_3+...+a_{2n-1}+4\cdot a_{2n-1}=5\cdot a_1+5\cdot a_3+...+5\cdot a_{2n-1}=5\cdot\left(a_1+a_3+...+a_{2n-1}\right)$$
....1p

a) Am arătat că $S\vdots 5$, dar 2026 nu este multiplu de 5, deci S nu poate fi 2026..........................1p

b) Dacă $S=2025=5\cdot\left(a_1+a_3+...+a_{2n-1}\right)\Rightarrow a_1+a_3+...+a_{2n-1}=2025:5=405$ 1p

Cel mai mic astfel de număr se obține pentru cel mai mic număr de cifre, adică pentru cele mai mari cifre posibile. Ținând cont de relația (1), cum suma este 405, număr impar, trebuie să fie $a_1=1$ și $a_3=a_5=...=a_{405}=2$, iar cel mai mic număr de forma cerută este $N_1=\overline{142828...28}$ care are $(202+1)\cdot 2=406$ cifre..2p

Cel mai mare astfel de număr se obține pentru cel mai mare număr de cifre, adică pentru cele mai mici cifre posibile. Ținând cont de relația (1), cum suma este 405, trebuie să fie 405 de cifre egale cu 1 pe poziții impare, iar cel mai mare număr de forma cerută este

$N_2 = \overline{141414...14}$ care are $405 \cdot 2 = 810$ cifre……………………………………………………2p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.