



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a IX-a

Problema 1

Pentru un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ se notează cu $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați șirurile de numere naturale nenule $(a_n)_{n \geq 1}$ pentru care $\frac{2a_1}{S_1 S_2} + \frac{2a_2}{S_2 S_3} + \dots + \frac{2a_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S_p = 2025$.

Problema 2

Fie triunghiul ABC și D mijlocul laturii (BC) . Fie $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $AM = CN = x$. Notăm cu $\{P\} = MN \cap AD$ și cu $\{Q\} = BN \cap AD$.

- a) Arătați că $\frac{QB}{QN} - \frac{PM}{PN} = 1$ dacă și numai dacă $AB = AC$.
- b) Dacă $AB = AC = 1$ și P este mijlocul lui (AQ) , determinați x .

Gazeta Matematică

Problema 3

Se consideră numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătați că este adevărată inegalitatea

$$\frac{3a+1}{\sqrt{b+c}} + \frac{3b+1}{\sqrt{c+a}} + \frac{3c+1}{\sqrt{a+b}} \geq 6.$$

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”

EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a IX-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

Pentru un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ se notează cu $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați șirurile de numere naturale nenule $(a_n)_{n \geq 1}$ pentru care $\frac{2a_1}{S_1 S_2} + \frac{2a_2}{S_2 S_3} + \dots + \frac{2a_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S_p = 2025$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție.

Avem relația $\sum_{k=1}^n \frac{2a_k}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$ (1)

În (1) facem $n=1$ și obținem $\frac{2a_1}{S_1 S_2} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}$, de unde $a_2 = 2a_1$ 1p

Pentru $n \geq 2$, scriem (1) pentru $n-1$ și obținem $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2a_k}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_n}$ (2). Din (1) și (2), prin

scădere, obținem $\frac{2a_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$, de unde $S_{n+1} - S_n = 2a_n$, adică $a_{n+1} = 2a_n$, $n \geq 2$. Deci

$a_{n+1} = 2a_n$, $n \geq 1$, ceea ce înseamnă că șirul a_n este o progresie geometrică cu rația $q=2$ și prin urmare $a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 4p

Determinăm acum a_1 : Avem $S_p = a_1 \frac{2^p - 1}{2 - 1} = a_1 (2^p - 1)$. Pentru $S_p = 2025$, avem

$a_1 (2^p - 1) = 2025 = 45^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Din $(2^p - 1) \mid 3^4 \cdot 5^2$, rezultă că $2^p - 1 = 3^n \cdot 5^q$, unde

$n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și $q \in \{0, 1, 2\}$ 1p

Pentru $q=0$, avem $2^p = 1 + 3^n \in \{2, 4, 10, 28, 82\}$ și deci $p \in \{1, 2\}$ și imediat $a_1 = 2025$ sau

$a_1 = \frac{2025}{3} = 675$ 1p

Pentru $q \geq 1$, avem că $5 \mid 2^p - 1$. Avem $2^4 = 16 = M_5 + 1$ și imediat $2^{4k} = M_5 + 1$,

$2^{4k+1} = M_5 + 2$, $2^{4k+2} = M_5 + 4$, $2^{4k+3} = M_5 + 3$. Atunci $5 \mid 2^p - 1$ pentru $p = 4k$. Dar

$2^{11} = 2048 > 2025$ și atunci $p \in \{4, 8\}$. Dacă $p=4$, $2^4 - 1 = 15$, deci $a_1 = \frac{2025}{15} = 135$, iar

pentru $p=8$, avem $2^8 - 1 = 15 \cdot 17$, dar în acest caz $a_1 \notin \mathbb{N}$. În concluzie șirurile căutate sunt

$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$ cu $a_1 \in \{135, 675, 2025\}$ 2p

Oficiu 1p

Problema 2

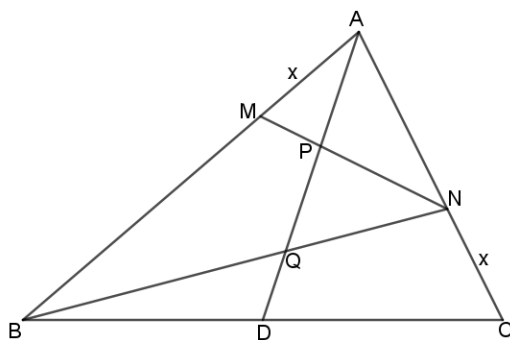
Fie triunghiul ABC și D mijlocul laturii (BC) . Fie $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $AM = CN = x$. Notăm cu $\{P\} = MN \cap AD$ și cu $\{Q\} = BN \cap AD$.

a) Arătați că $\frac{QB}{QN} - \frac{PM}{PN} = 1$ dacă și numai dacă $AB = AC$.

b) Dacă $AB = AC = 1$ și P este mijlocul lui (AQ) , determinați x .

Adrian Bud, Negrești Oaș, G.M. 1/2025

Soluție.



a) $\left\{ \begin{array}{l} \triangle BNC \\ A-Q-D \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Menelaus}} \frac{BQ}{QN} \cdot \frac{NA}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$ și de aici $\frac{BQ}{QN} = \frac{AC}{NA} = \frac{AC}{AC-x}$ 1p

$\left\{ \begin{array}{l} \triangle BMN \\ A-P-Q \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Menelaus}} \frac{MP}{PN} \cdot \frac{NQ}{QB} \cdot \frac{BA}{AM} = 1$ și de aici $\frac{MP}{PN} = \frac{QB}{QN} \cdot \frac{AM}{AB} = \frac{xAC}{AB(AC-x)}$ 1p

Avem $\frac{QB}{QN} - \frac{PM}{PN} = \frac{AC}{AC-x} \left(1 - \frac{x}{AB} \right) = \frac{AC(AB-x)}{AB(AC-x)}$. Atunci

$\frac{QB}{QN} - \frac{PM}{PN} = 1 \Leftrightarrow AC(AB-x) = AB(AC-x) \Leftrightarrow AB = AC$ 2p

b) Cum $\frac{MP}{PN} = \frac{xAC}{AB(AC-x)} = \frac{x}{1-x}$ avem $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AM} + \frac{x}{1-x} \overrightarrow{AN}}{1 + \frac{x}{1-x}}$. Deoarece $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ și

$\overrightarrow{AN} = (1-x)\overrightarrow{AC}$, avem $\overrightarrow{AP} = x(1-x)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ 2p

Cum $\frac{BQ}{QN} = \frac{AC}{AC-x} = \frac{1}{1-x}$, avem $\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1-x} \overrightarrow{AN}}{1 + \frac{1}{1-x}} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{1 + \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{2-x} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ 1p

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AQ} \Rightarrow x = \frac{1}{2(2-x)}$ de unde $2x^2 - 4x + 1 = 0$, adică $x \in \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \right\}$. Dar $x \in (0,1)$ și

atunci $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 2p

Oficiu 1p

Problema 3

Se consideră numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătați că este adevărată inegalitatea

$$\frac{3a+1}{\sqrt{b+c}} + \frac{3b+1}{\sqrt{c+a}} + \frac{3c+1}{\sqrt{a+b}} \geq 6.$$

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție.

Folosind inegalitatea mediilor, avem $\sqrt{b} = \sqrt{1 \cdot b} \leq \frac{1+b}{2}$ și atunci $\frac{3a+1}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{6a+2}{1+b+2c}$. Avem

$$\sum \frac{3a+1}{\sqrt{b+c}} \geq \sum \frac{6a+2}{1+b+2c} \quad (1) \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Vom demonstra inegalitatea } \sum \frac{6a+2}{1+b+2c} \geq 6 \quad (2)$$

Folosim în rezolvare inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz (variantea Bergström:

$$\left(\sum (\sqrt{x})^2 \right) \left(\sum \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right)^2 \right) \geq \left(\sum \sqrt{x} \cdot \frac{a}{\sqrt{x}} \right)^2, \text{ adică } \sum \frac{a^2}{x} \geq \frac{\left(\sum a \right)^2}{\sum x}.$$

Avem

$$E = \sum \frac{6a+2}{1+b+2c} = 6 \sum \frac{a}{1+b+2c} + 2 \sum \frac{1}{1+b+2c} = 6 \sum \frac{a^2}{a+ab+2ac} + 2 \sum \frac{1^2}{1+b+2c} \text{ și folosind}$$

$$\text{inegalitatea Bergström, avem } E \geq 6 \frac{\left(\sum a \right)^2}{\sum a + 3 \sum ab} + 2 \frac{3^2}{3 + 3 \sum a} \dots\dots\dots 3p$$

De asemenea din inegalitatea cunoscută $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, obținem $3 \sum ab \leq \left(\sum a \right)^2$.

Notând $S = \sum a$, avem

$$E \geq 6 \frac{\left(\sum a \right)^2}{\sum a + 3 \sum ab} + 2 \frac{3^2}{3 + 3 \sum a} \geq 6 \frac{S^2}{S + S^2} + 2 \frac{3^2}{3 + 3S} = \frac{6S}{1+S} + \frac{6}{1+S} = 6. \text{ Din (1) și (2) rezultă}$$

inegalitatea din enunț. 3p

Oficiu 1p

Soluție alternativă pentru inegalitatea (2)

Notăm $1+b+2c = x$, $1+c+2a = y$, $1+a+2b = z$, de unde $3+3(a+b+c) = x+y+z$, adică

$$a+b+c = \frac{x+y+z}{3} - 1. \text{ De asemenea } x-y = b+c-2a, \text{ adică } b+c = x-y+2a \text{ și atunci}$$

$$a+x-y+2a = \frac{x+y+z}{3} - 1, \text{ de unde } 3(3a+1) = -2x+4y+z, \text{ sau } 3a+1 = \frac{-2x+4y+z}{3},$$

$$\text{Atunci } \frac{6a+2}{1+b+2c} = \frac{2}{3} \frac{4y+z-2x}{x} = \frac{8y}{3x} + \frac{2z}{3x} - \frac{4}{3} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Avem } \sum \frac{6a+2}{1+b+2c} = \frac{8}{3} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) - 4. \text{ Cum } \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \geq 3 \text{ și } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3,$$

$$\text{obținem } \sum \frac{6a+2}{1+b+2c} \geq 8+2-4=6. \dots\dots\dots 3p$$

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.