



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a VIII-a

Problema 1

- a) Să se determine numerele naturale x și y cu proprietățile $\sqrt{x+\sqrt{y}} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{y+\sqrt{x}} \in \mathbb{N}$.
- b) Să se determine valoarea maximă și valoarea minimă a sumei $x+y+z$ știind că x, y, z sunt numere reale care îndeplinesc simultan condițiile

$$x^2 + yz \leq 2, \quad y^2 + xz \leq 2, \quad z^2 + xy \leq 2.$$

Problema 2

- a) Fie a și b două numere naturale nenule. Notăm

$$x = \frac{2a^2b}{a^3+b^3}, \quad y = \frac{2ab^2}{a^3+b^3} \quad \text{și} \quad z = x^{2025} + y^{2025}.$$

Să se calculeze z știind că x și y sunt numere naturale.

- b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.$$

Problema 3

Fie $ABCD$ un pătrat cu centrul O . Pe latura CD se consideră un punct X și notăm cu F intersecția dreptelor AC și BX . Din F se ridică perpendiculara SF pe planul (ABC) . Dacă $CX^2 = 2 \cdot OF^2$ arătați că planele (SBD) și (SBC) fac cu planul (ABC) unghiuri cu aceeași măsură.

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a VIII-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

- a) Să se determine numerele naturale x și y cu proprietățile $\sqrt{x+\sqrt{y}} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{y+\sqrt{x}} \in \mathbb{N}$.
- b) Să se determine valoarea maximă și valoarea minimă a sumei $x+y+z$ știind că x, y, z sunt numere reale care îndeplinesc simultan condițiile
- $$x^2 + yz \leq 2, \quad y^2 + xz \leq 2, \quad z^2 + xy \leq 2.$$

Soluție.

a) Dacă $y=0$ atunci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{\sqrt{x}} \in \mathbb{N} \Rightarrow x=n^4, n \in \mathbb{N}$ 1p

Dacă $x=0$ atunci $\sqrt{y} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{\sqrt{y}} \in \mathbb{N} \Rightarrow y=m^4, m \in \mathbb{N}$ 1p

Dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0$ atunci

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x+\sqrt{y}=a^2 \Leftrightarrow \sqrt{y}=a^2-x \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt{y+\sqrt{x}} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } y+\sqrt{x}=b^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=b^2-y \in \mathbb{N}^*$$

Rezultă că există $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $y=p^2$ și $x=q^2 \Rightarrow p=a^2-x$ și $q=b^2-y$ 2p

Vom avea $p+q^2=a^2$ și $p^2+q=b^2$.

Cum $p, q \in \mathbb{N}^* \Rightarrow p \neq 0, p+q^2$ = pătrat perfect, $p+q^2 > q^2 \Rightarrow p+q^2 \geq (q+1)^2$ și analog

$$p^2+q \geq (p+1)^2 \Leftrightarrow p \geq 2q+1 \text{ și } q \geq 2p+1.$$

Adunând aceste două relații rezultă $p+q+2 \leq 0$ ceea ce este fals și rezultă că x și y nu pot fi simultan nenule.....2p

b) Adunăm cele trei inegalități și rezultă

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \leq 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3xy + 3yz + 3xz \leq 18$$
1p

Adunăm ultima inegalitate cu inegalitatea cunoscută $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$

și rezultă $2(x+y+z)^2 \leq 18$ și apoi $|x+y+z| \leq 3 \Leftrightarrow x+y+z \in [-3, 3]$ 1p

Dacă $x=y=z=-1$ atunci $x+y+z=-3$

Dacă $x=y=z=1$ atunci $x+y+z=3$ 1p

Oficiu.....1p

Problema 2

a) Fie a și b două numere naturale nenule. Notăm

$$x = \frac{2a^2b}{a^3+b^3}, \quad y = \frac{2ab^2}{a^3+b^3} \text{ și } z = x^{2025} + y^{2025}.$$

Să se calculeze z știind că x și y sunt numere naturale.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5.$$

Soluție.

a) $a, b \in \mathbb{N}^*, x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \geq 1$ și $y \geq 1 \Rightarrow x + y \geq 2$

.....1p

$$\frac{2a^2b + 2ab^2}{a^3 + b^3} \geq 2 \Rightarrow \frac{2ab(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} \geq 2 \Rightarrow \frac{ab}{a^2 - ab + b^2} \geq 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$a^2 - ab + b^2 > 0 \Rightarrow ab \geq a^2 - ab + b^2 \Rightarrow 0 \geq (a-b)^2 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b \dots\dots\dots 1p$$

$$x=y=1 \Rightarrow z=2 \dots\dots\dots 1p$$

b) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5 \Leftrightarrow (12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4)=120$

Notez $12x=a \Rightarrow (a-1)(a-2)(a-3)(a-4)=120 \dots\dots\dots 1p$

$$(a^2 - 5a + 4)(a^2 - 5a + 6) = 120 \dots\dots\dots 1p$$

Notez $a^2 - 5a + 4 = t \Rightarrow t(t+2) = 120 \Rightarrow (t+1)^2 = 121 \Rightarrow t=10$ sau $t=-12 \dots\dots\dots 1p$

Dacă $t=10 \Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0 \Rightarrow a=6 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ sau $a=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{12} \dots\dots\dots 1p$

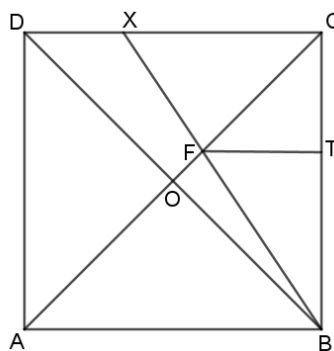
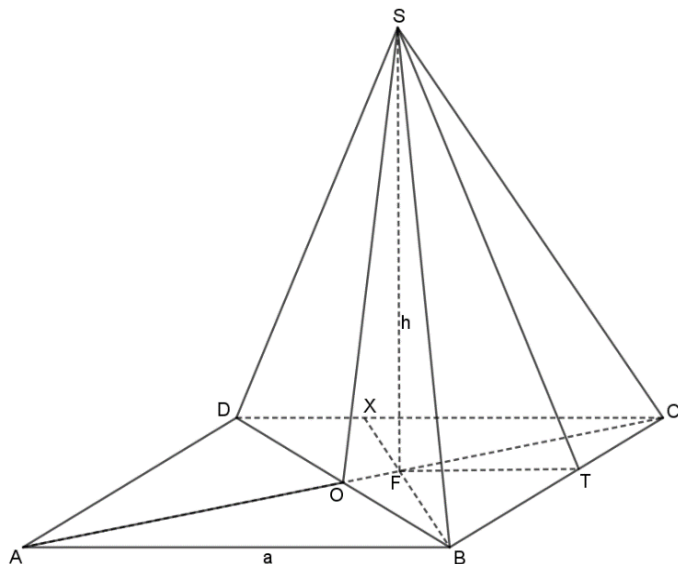
Dacă $t=-12 \Rightarrow a^2 - 5a + 16 = 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale.....1p

Oficiu.....1p

Problema 3

Fie $ABCD$ un pătrat cu centrul O . Pe latura CD se consideră un punct X și notăm cu F intersecția dreptelor AC și BX . Din F se ridică perpendiculara SF pe planul (ABC) . Dacă $CX^2 = 2 \cdot OF^2$, arătați că planele (SBD) și (SBC) fac cu planul (ABC) unghiuri cu aceeași măsură.

Mihaela Berindeanu, București, G.M. nr.1/2025





Soluție.

$$\angle((SBD), (ABC)) = \angle SOF \dots\dots\dots 2p$$

Construiesc $FT \perp BC, T \in BC$

$$\angle((SBC), (ABC)) = \angle STF \dots\dots\dots 2p$$

$$\triangle DCO, X - F - B \text{ transversală} \xRightarrow{T. Menelaus} \frac{DX}{CX} \cdot \frac{CF}{OF} \cdot \frac{OB}{DB} = 1$$

$$\text{Dacă notez } AB = a \text{ atunci } \frac{OB}{DB} = \frac{1}{2} \text{ și } \frac{DX}{CX} \cdot \frac{CF}{OF} = 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$CX^2 = 2 \cdot OF^2 \Rightarrow CX = \sqrt{2} \cdot OF, DX = a - CX, CF = \frac{a\sqrt{2}}{2} - OF$$

$$\frac{a - CX}{CX} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - OF}{OF} = 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{CX} - 1 \right) \left(\frac{a\sqrt{2}}{2OF} - 1 \right) = 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{OF\sqrt{2}} - 1 \right) \left(\frac{a}{OF\sqrt{2}} - 1 \right) = 2$$

$$\frac{a}{OF\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow OF = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}}$$

$$CF = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = a(\sqrt{2} - 1) \dots\dots\dots 2p$$

$$FT \parallel AB \Rightarrow \triangle CFT \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{FT}{AB} = \frac{CF}{CA} = \frac{CT}{CB} \Rightarrow \frac{FT}{a} = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{a\sqrt{2}} \Rightarrow FT = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots 1p$$

Cum $OF = FT \Rightarrow$ triunghiurile dreptunghice SFO și SFT sunt congruente

$$\Rightarrow \angle SOF = \angle STF \dots\dots\dots 1p$$

Oficiu.....1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.