



MINISTERUL EDUCAȚIEI
ȘI CERCETĂRII

**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025**

Clasa a VI-a

Problema 1

Să se determine numerele prime p și q pentru care $p(p-1)(p+1) = 8q(6q^2+1)$.

Problema 2

Aflați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$\frac{a}{(a,b)} = b + \frac{48 \cdot (a,b)}{[a,b]} \text{ și } \frac{b}{(a,b)} = a - \frac{312 \cdot (a,b)}{[a,b]}.$$

Am notat cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b , iar cu $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Gazeta Matematică

Problema 3

Fie $\triangle ABC$ și punctul D aflat pe dreapta BC de aceeași parte a lui C ca punctul B , astfel încât $CD \equiv AB$. Dacă E este punctul de intersecție dintre bisectoarea unghiului ABC și mediatoarea laturii BC , iar punctul F este simetricul punctului E față de dreapta BC , să se arate că $AE \equiv DF$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a VI-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

Să se determine numerele prime p și q pentru care $p(p-1)(p+1) = 8q(6q^2 + 1)$.

Soluție.

Cum $p(p-1)(p+1) = (p-1) \cdot p \cdot (p+1) : 3$, ca produs de trei numere naturale consecutive...3p

Atunci $8q(6q^2 + 1)$ este multiplu de 3, iar 8 și $6q^2 + 1$ nu sunt multipli de 3, deci $q = 3$3p

Se obține $(p-1) \cdot p \cdot (p+1) = 8 \cdot 3 \cdot 55 = 10 \cdot 11 \cdot 12$ și deci $p = 11$, care este prim.....3p

Oficiu 1p

Problema 2.

Aflați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$\frac{a}{(a,b)} = b + \frac{48 \cdot (a,b)}{[a,b]} \text{ și } \frac{b}{(a,b)} = a - \frac{312 \cdot (a,b)}{[a,b]}.$$

Am notat cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b , iar cu $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Gazeta Matematică 12/2024

Soluție.

Dacă notăm $(a,b) = d, d \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = d \cdot m, b = d \cdot n, [a,b] = d \cdot m \cdot n$, unde

$m, n \in \mathbb{N}^*, (m,n) = 1$ 1p

Atunci relațiile din enunț devin $m = d \cdot n + \frac{48}{m \cdot n}$ și $n = d \cdot m - \frac{312}{m \cdot n}$ 2p

Înmulțind prima relație cu n și pe a doua cu m și scăzându-le, se obține după prelucrare

$$d \cdot (m^2 - n^2) = \frac{312}{n} + \frac{48}{m} \text{2p}$$

De aici, $m > n, 48 : m, 312 : n$, deci $m \in D_{48}, n \in D_{312}, 48 = 2^4 \cdot 3, 312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$ 2p

Ținând cont de condițiile precedente și de $(m, n) = 1$, singura variantă convenabilă este

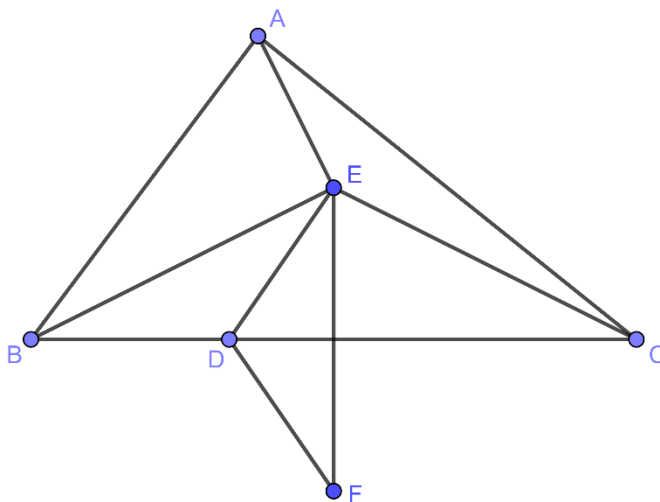
$m = 8, n = 3 \Rightarrow d = 2$ și $a = 16, b = 6$ 2p

Oficiu 1p

Problema 3.

Fie $\triangle ABC$ și punctul D aflat pe dreapta BC de aceeași parte a lui C ca punctul B , astfel încât $CD \equiv AB$. Dacă E este punctul de intersecție dintre bisectoarea unghiului ABC și mediatoarea laturii BC , iar punctul F este simetricul punctului E față de dreapta BC , să se arate că $AE \equiv DF$.

Soluție.



Cum BE este bisectoarea unghiului $ABC \Rightarrow ABE \equiv EBC$ 1p

E se află pe mediatoarea segmentului $BC \Rightarrow BE \equiv CE \Rightarrow \triangle EBC$ este isoscel $\Rightarrow EBC \equiv ECB$,
deci $ABE \equiv ECB$ și cum $AB \equiv CD$, $\Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE \Rightarrow AE \equiv DE$ 4p
(L.U.L.)

Dar F este simetricul lui E față de $BC \Rightarrow BC$ este mediatoarea segmentului EF și $D \in BC$,
deci $DE \equiv DF$ 3p

În concluzie, $AE \equiv DF$ 1p

Oficiu 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.