



MINISTERUL EDUCAȚIEI
ȘI CERCETĂRII

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a XII-a

Problema 1

Determinați $\int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{e^{2x} - 2e^x + 2} dx$.

Gazeta Matematică

Problema 2

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m, n \geq 2$ și $(G_1, \cdot)$ respectiv $(G_2, \cdot)$ două grupuri ciclice cu m , respectiv n elemente. Dacă există un morfism injectiv $f: G_1 \rightarrow G_2$ astfel încât pentru orice $r \in \{1, 2, 3, \dots, m-1\}$,

$f_r: G_1 \rightarrow G_2$, $f_r(x) = (f(x))^r$ este funcție injectivă, atunci să se arate că:

- a) $\text{Im} f = \{f(x) | x \in G_1\}$ este subgrup al lui $(G_2, \cdot)$ și n se divide prin m ;
- b) m este număr prim.

Problema 3

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $\int_a^b f(x) dx = 0$.

a) Arătați că $\int_a^b e^{f(x)} dx \geq b - a$.

b) Arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $2 \int_a^c f(x) dx = (a + b - 2c) f(c)$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a XII-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

Determinați $\int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{e^{2x} - 2e^x + 2} dx$.

Aurel Doboșan, Lugoj, G.M. 1/2025

Soluție.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{xe^x}{e^{2x} - e^x + 2}$ și $I = \int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{e^{2x} - 2e^x + 2} dx = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$.

Cu schimbarea de variabilă $t = \ln 2 - x$, avem $dx = -dt$, $x = 0 \Rightarrow t = \ln 2$, $x = \ln 2 \Rightarrow t = 0$ și atunci

avem $I = \int_{\ln 2}^0 f(\ln 2 - t)(-dt) = \int_0^{\ln 2} f(\ln 2 - t) dt$ 3p

Avem $f(\ln 2 - t) = \frac{(\ln 2 - t)e^{\ln 2 - t}}{e^{2(\ln 2 - t)} - e^{\ln 2 - t} + 2}$ și cum $e^{\ln 2 - t} = \frac{e^{\ln 2}}{e^t} = \frac{2}{e^t}$, atunci

$f(\ln 2 - t) = \frac{(\ln 2 - t) \frac{2}{e^t}}{\frac{4}{e^{2t}} - \frac{2}{e^t} + 2} = \frac{(\ln 2 - t)e^t}{e^{2t} - 2e^t + 2} = \frac{e^t \ln 2}{e^{2t} - 2e^t + 2} - f(t)$ 3p

Avem $I = \int_0^{\ln 2} f(\ln 2 - t) dt = \ln 2 \int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{e^{2t} - 2e^t + 2} dt - I$ și deci

$I = \frac{\ln 2}{2} \int_0^{\ln 2} \frac{(e^t - 1)'}{(e^t - 1)^2 + 1} dt = \frac{\ln 2}{2} \cdot \arctg(e^t - 1) \Big|_0^{\ln 2} = \frac{\ln 2}{2} \cdot \arctg 1 = \frac{\pi \ln 2}{8}$ 3p

Oficiu 1p

Problema 2

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m, n \geq 2$ și $(G_1, \cdot)$ respectiv $(G_2, \cdot)$ două grupuri ciclice cu m , respectiv n elemente. Dacă există un morfism injectiv $f: G_1 \rightarrow G_2$ astfel încât pentru orice $r \in \{1, 2, 3, \dots, m-1\}$,

$f_r: G_1 \rightarrow G_2$, $f_r(x) = (f(x))^r$ este funcție injectivă, atunci să se arate că:

- $\text{Im} f = \{f(x) | x \in G_1\}$ este subgrup al lui $(G_2, \cdot)$ și n se divide prin m ;
- m este număr prim.

Marin Ionescu, Pitești

Soluție.

a) Cum $f : G_1 \rightarrow G_2$ este morfism de grupuri atunci $f(e_1) = e_2$ și $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, $x \in G_1$, unde e_1 și e_2 sunt elementele neutre ale celor două grupuri.

Arătăm că $\text{Im } f = \{f(x) | x \in G_1\}$ este subgrup al lui G_2 . Fie $u, v \in \text{Im } f$, deci există $x, y \in G_1$ astfel încât $u = f(x)$ și $v = f(y)$. Avem $uv = f(x)f(y) = f(xy) \in \text{Im } f$ și

$u^{-1} = (f(x))^{-1} = f(x^{-1}) \in \text{Im } f$, ceea ce înseamnă că $\text{Im } f = \{f(x) | x \in G_1\}$ este subgrup al lui

$(G_2, \cdot)$ 2p

Cum f este morfism injectiv atunci $|\text{Im } f| = |G_1| = m$. Din teorema Lagrange rezultă că

$\text{ord}(\text{Im } f) | \text{ord } G_2$, adică $m | n$ 2p

b) Arătăm în continuare că m este număr prim. Presupunem prin absurd că m nu este prim, deci există p număr prim astfel încât $p | m$. Deoarece G_1 este grup ciclic cu m elemente, există

$x \in G \setminus \{e_1\}$ astfel încât $G_1 = \{e_1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$ și $x^m = e_1$, unde e_1 este elementul neutru al grupului

G_1 . Fie $y = f(x)$. Cum f este morfism injectiv atunci

$\text{Im } f = \{f(e_1), f(x), f(x^2), \dots, f(x^{m-1})\} = \{e_2, y, y^2, \dots, y^{m-1}\} \subset G_2$ 2p

Din ipoteză funcția $f_p : G_1 \rightarrow G_2$, $f_p(a) = (f(a))^p$ este injectivă.

Demonstrăm că f_p este morfism. Deoarece orice grup ciclic este comutativ, avem

$f_p(ab) = (f(ab))^p = (f(a)f(b))^p = (f(a))^p (f(b))^p = f_p(a)f_p(b)$, $\forall a, b \in G_1$. Cum f_p este morfism, avem $f_p(a) = (f(a))^p = f(a^p)$, $\forall a \in G_1$.

Din p număr prim și $p | m$ rezultă (teorema Cauchy) că există $a \in G_1 \setminus \{e_1\}$ astfel încât $\text{orda} = p$.

Deci $a \neq e_1$ și $a^p = e_1$. Din (1) rezultă $f_p(a) = f(a^p) = f(e_1)$. Așadar $a \neq e_1$ și $f_p(a) = f_p(e_1)$.

Ceea ce înseamnă că funcția f_p nu este injectivă, deci contradicție cu f_p injectivă. Așadar

presupunerea este falsă și prin urmare m este număr prim. 3p

Oficiu 1p

Problema 3

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $\int_a^b f(x) dx = 0$.

a) Arătați că $\int_a^b e^{f(x)} dx \geq b - a$.

b) Arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $2 \int_a^c f(x) dx = (a + b - 2c) f(c)$.

Rică Zamfir, București



Soluție.

a) Folosind inegalitatea $e^x \geq 1+x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$\int_a^b e^{f(x)} dx \geq \int_a^b (1+f(x)) dx = \int_a^b dx + \int_a^b f(x) dx = b-a. \dots\dots\dots 3p$$

b) Considerăm funcția $g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x-a) \int_a^x f(t) dt + (b-x) \int_x^b f(t) dt$ care verifică condițiile teoremei lui Rolle. Rezultă că există $c \in (a,b)$ astfel încât $g'(c) = 0$. Avem

$$g'(x) = \int_a^x f(t) dt + (x-a)f(x) - \int_x^b f(t) dt - (b-x)f(x). \text{ Din } g'(c) = 0, \text{ obținem}$$

$$\int_a^c f(t) dt - \int_c^b f(t) dt = (a+b-2c)f(c). \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Cum } \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = 0, \text{ obținem } 2 \int_a^c f(t) dt = (a+b-2c)f(c) \dots\dots\dots 2p$$

Oficiu 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.