



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a XI-a

Problema 1

Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$, pentru orice $n \geq 1$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n^2} \right)^{\sqrt{x_n}}$.

Gazeta Matematică

Problema 2

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1} \right)^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, este monoton și mărginit.

b) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (nx_n^2 - (n-1)x_{n-1}^2)$.

Problema 3

Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $(A^*)^2 \neq O_3$, unde A^* reprezintă matricea adjuncă a lui A . Arătați că $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(A)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a XI-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$,
pentru orice $n \geq 1$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n^2} \right)^{\sqrt{x_n}}$.

Petru Tudor, Sebeș, G.M. 1/2025

Soluție.

Avem $x_2 = 1$ și evident $x_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$ 1p
Relația din enunț se mai scrie $\sqrt{x_{n+1}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, pentru orice $n \geq 1$. Scriem această
relație pentru $n-1$ și avem $\sqrt{x_n} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$, $n \geq 2$. Din cele două relații avem
 $\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n} = x_n$, adică $\sqrt{x_{n+1}} = \sqrt{x_n} + x_n$, $\forall n \geq 2$. Imediat $\sqrt{x_{n+1}} > \sqrt{x_n}$, $\forall n \geq 2$, deci șirul
 $(x_n)_{n \geq 2}$ este strict crescător. 2p
Demonstrăm că șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ este nemărginit superior. Presupunem că șirul este mărginit
superior și cum el este crescător și $x_n \geq x_2 = 1$ rezultă că el este convergent, deci șirul are limita
finită: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l > 1$. Trecând la limită în relația $\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n} = x_n$, obținem $l = 0$ ceea ce este
o contradicție. Așadar șirul este nemărginit și cum este strict crescător, el are limită și
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 3p
Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n^2} \right)^{\sqrt{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x_{n+1}}}{x_n} \right)^{2\sqrt{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n + \sqrt{x_n}}{x_n} \right)^{2\sqrt{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)^{2\sqrt{x_n}} = e^2$.
..... 3p
Oficiu 1p

Problema 2

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1} \right)^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, este monoton și mărginit.

b) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (nx_n^2 - (n-1)x_{n-1}^2)$.

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție.

a) Evident $x_n \geq 0$. Deoarece $0 \leq \frac{k}{k+1} \leq 1$, avem $\sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ și atunci $x_n \leq 1$. Prin urmare $x_n \in [0, 1]$, pentru orice $n \geq 1$ 1p

Studiem monotonia șirului $(y_n)_{n \geq 1}$ unde $y_n = x_n^2$. Avem

$$y_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 + \frac{1}{(n+1)^2} (2n+1) \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 \text{ și atunci}$$

$$y_{n+1} - y_n = \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 + \frac{1}{(n+1)^2} (2n+1) \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2. \text{ Deoarece}$$

$$\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 \text{ avem}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 - \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \right).$$

$$\text{Cum } \frac{n+1}{n+2} > \frac{k}{k+1}, k = \overline{1, n}, \text{ atunci } y_{n+1} - y_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 - \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \right) > 0,$$

adică șirul este crescător (strict), deci și șirul x_n este crescător. 3p

$$\text{b) Pentru șirul } y_n = \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1} \right)^2}{n^2} = \frac{a_n}{n^2}, \text{ folosind lema Stolz - Cesaro, avem}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2}{2n+1} = 1, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1. \text{ 2p}$$

$$\text{Avem } n^2 x_n^2 - (n-1)^2 x_{n-1}^2 = (2n-1) \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \text{ sau } nx_n^2 - \frac{n(n-1) - (n-1)}{n} x_{n-1}^2 = \frac{2n-1}{n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2,$$

$$\text{de unde } nx_n^2 - (n-1)x_{n-1}^2 = -\frac{n-1}{n} x_{n-1}^2 + \frac{2n-1}{n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \text{ și atunci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (nx_n^2 - (n-1)x_{n-1}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n-1}{n} x_{n-1}^2 + \frac{2n-1}{n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \right) = -1 + 2 = 1. \text{ 3p}$$

Oficiu 1p

Problema 3

Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $(A^*)^2 \neq O_3$, unde A^* reprezintă matricea adjunctă a lui

A . Arătați că $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(A)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Marin Ionescu, Pitești



Soluție.

Evident $\text{rang} A > 1$, altfel $A^* = O_3$ și atunci $(A^*)^2 = O_3$ în contradicție cu ipoteza. 1p

Cazul 1.

$\text{rang} A = 3$, adică $\det A \neq 0$ și atunci $\det A^k = \det^k A \neq 0$, deci $\text{rang} A^k = 3 = \text{rang} A$ 1p

Cazul 2.

$\text{rang} A = 2$, deci $\det A = 0$. Din inegalitatea lui Sylvester avem

$\text{rang}(A \cdot A^*) \geq \text{rang} A + \text{rang} A^* - 3$ și din $A \cdot A^* = \det A \cdot I_3 = O_3$ obținem $\text{rang} A^* \leq 1$, dar

$A^* \neq O_3$, deci $\text{rang} A^* = 1$

..... 2p

Lemă. Dacă $D \in M_n(\mathbb{C})$ și $\text{rang} D = 1$ atunci $D^2 = \text{tr} D \cdot D$.

Demonstrație. Se cunoaște că dacă $D = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ și $\text{rang} D = 1$ atunci există $b_k, c_k \in \mathbb{C}$,

$k = \overline{1, n}$ astfel încât $a_{ij} = b_i \cdot c_j$, $i, j = \overline{1, n}$. Notând $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $C = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$, avem

$D = BC$. Atunci $D^2 = BCBC$ și cum $CB = \left(\sum_{k=1}^n b_k c_k \right) = \text{tr} D$, avem $D^2 = \text{tr} D \cdot BC = \text{tr} D \cdot D$.

Folosind lema din $\text{rang} A^* = 1$, rezultă $(A^*)^2 = \text{tr} A^* \cdot A^*$ și prin urmare $\text{tr} A^* \neq 0$. Imediat prin

inducție $(A^*)^k = (\text{tr} A^*)^{k-1} \cdot A^* \neq O_3$ pentru orice $k \geq 2$ 2p

Conform inegalității lui Sylvester avem $\text{rang} A^2 = \text{rang}(A \cdot A) \geq \text{rang} A + \text{rang} A - 3 = 1$, iar

$\det A^2 = 0$, deci $\text{rang} A^2 \in \{1, 2\}$. Dacă $\text{rang} A^2 = 1$ avem $(A^2)^* = O_3$, deci $(A^*)^2 = (A^2)^* = O_3$

, ceea ce este o contradicție. Așadar $\text{rang} A^2 = 2 = \text{rang} A$ 2p

Presupunem acum că $\text{rang} A^k = 2$ și demonstrăm că $\text{rang} A^{k+1} = 2$, unde $k \geq 2$ este arbitrar

ales. Procedând analog ca mai înainte, obținem $\text{rang} A^{k+1} \in \{1, 2\}$, iar presupunând că

$\text{rang} A^{k+1} = 1$, am avea $(A^*)^{k+1} = (A^{k+1})^* = O_3$, fals.

Prin urmare $\text{rang} A^k = 2 = \text{rang} A$ 1p

Oficiu 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.