



MINISTERUL EDUCAȚIEI
ȘI CERCETĂRII

**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025**

Clasa a X-a

Problema 1

Determinați umerele complexe z și w știind că sunt verificate egalitățile

$$|z|^2 + z \cdot w + \bar{w} = 1 + 2i \text{ și } |w|^2 + \bar{z} \cdot \bar{w} + z = -i.$$

Gazeta Matematică

Problema 2

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 - 1) - \lg(4x^2 + 9x + 5) = x^2 + 3x + 2$.

Problema 3

Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \left[\sqrt{n} \right] + \left[\sqrt[3]{n} \right]$.

a) Determinați numerele naturale n pentru care $f(n) = 4$.

b) Determinați imaginea funcției f .

($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a X-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1.

Determinați umerele complexe z și w știind că sunt verificate egalitățile

$$|z|^2 + z \cdot w + \bar{w} = 1 + 2i \text{ și } |w|^2 + \bar{z} \cdot \bar{w} + z = -i.$$

Lucian Tuțescu, Craiova, GM 12/2024

Soluție.

Avem relațiile

$$z \cdot \bar{z} + z \cdot w + \bar{w} = 1 + 2i \quad (1)$$

$$w \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot \bar{w} + z = -i \quad (2)$$

Adunând relațiile (1) și (2), obținem $z(\bar{z} + w) + \bar{w} + \bar{w}(\bar{z} + w) + z = 1 + i$ sau

$$(\bar{z} + w)(z + \bar{w}) + \bar{w} + z = 1 + i. \text{ Notăm } \alpha = \bar{z} + w \text{ și atunci ultima relație devine } \alpha \cdot \bar{\alpha} + \bar{\alpha} = 1 + i.$$

Fie $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, obținem sistemul $\begin{cases} a^2 + b^2 + a = 1 \\ -b = 1 \end{cases}$ care are soluțiile $(0, -1)$, $(-1, -1)$,

deci $\alpha = -i$ sau $\alpha = -1 - i$ 3p

Scăzând relațiile (1) și (2), avem $z \cdot \bar{z} + z \cdot w + \bar{w} - w \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot \bar{w} - z = 1 + 3i$ sau

$$z(\bar{z} + w) + \bar{w} - \bar{w}(w + \bar{z}) - z = 1 + 3i, \text{ adică } (\bar{z} + w)(z - \bar{w}) + \bar{w} - z = 1 + 3i, \text{ de unde}$$

$$(\bar{z} + w - 1)(z - \bar{w}) = 1 + 3i. \text{ Notând } \beta = z - \bar{w}, \text{ avem } \beta(\alpha - 1) = 1 + 3i, \text{ adică } \beta = \frac{1 + 3i}{\alpha - 1}.$$

..... 2p

Cazul 1. $\alpha = -i$, atunci $\beta = \frac{1 + 3i}{1 - i} = -2 - i$. Și atunci avem $\begin{cases} \bar{z} + w = -i \\ z - \bar{w} = -2 - i \end{cases}$, sistem care are

soluția $(z, w) = (-1, 1 - i)$ 2p

Cazul 2. $\alpha = -1 - i$, atunci $\beta = \frac{1 + 3i}{-2 - i} = -1 - i$. Avem sistemul $\begin{cases} \bar{z} + w = -1 - i \\ z - \bar{w} = -1 - i \end{cases}$, sistem care are

soluția $(z, w) = (-1, -i)$ 2p

Oficiu 1p

Problema 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 - 1) - \lg(4x^2 + 9x + 5) = x^2 + 3x + 2$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluție.

Condițiile de existență ale logaritmlor sunt $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 4x^2 + 9x + 5 > 0 \end{cases}$, de unde

$$x \in D = \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (1, \infty). \dots\dots\dots 3p$$

Cum $4x^2 + 9x + 5 - (x^2 - 1) = 3(x^2 + 3x + 2)$, adică $x^2 + 3x + 2 = \frac{4x^2 + 9x + 5}{3} - \frac{x^2 - 1}{3}$,

ecuația se mai scrie sub forma $\lg(x^2 - 1) + \frac{x^2 - 1}{3} = \lg(4x^2 + 9x + 5) + \frac{4x^2 + 9x + 5}{3}$.

Considerând funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lg x + \frac{x}{3}$, atunci avem ecuația

$$f(x^2 - 1) = f(4x^2 + 9x + 5) \quad (1)$$

..... 2p

Funcția f fiind suma a două funcții strict crescătoare, este strict crescătoare, deci este injectivă.

..... 2p

Atunci din (1) obținem $x^2 - 1 = 4x^2 + 9x + 5$, adică $3x^2 + 9x + 6 = 0$. Avem $x_1 = -2 \in D$ și $x_2 = -1 \notin D$.

Deci $S = \{-2\}$ este mulțimea soluțiilor reale ale ecuației din enunț. 2p

Oficiu 1p

Problema 3.

Fie funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil + \lceil \sqrt[3]{n} \rceil$.

a) Determinați numerele naturale n pentru care $f(n) = 4$.

b) Determinați imaginea funcției f .

($\lceil x \rceil$ reprezintă partea întreagă a numărului real x)

Marcel Popescu, Slobozia

Soluție.

a) Evident $f(n) = 0 \Leftrightarrow n = 0$. Pentru $n \geq 1$, cum $\lceil \sqrt{n} \rceil, \lceil \sqrt[3]{n} \rceil \in \mathbb{N}$ și $\lceil \sqrt{n} \rceil \geq \lceil \sqrt[3]{n} \rceil$, avem

posibilitățile: $\begin{cases} \lceil \sqrt{n} \rceil = 3 \\ \lceil \sqrt[3]{n} \rceil = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} \lceil \sqrt{n} \rceil = 2 \\ \lceil \sqrt[3]{n} \rceil = 2 \end{cases}$ 1p

Din $\begin{cases} \lceil \sqrt{n} \rceil = 3 \\ \lceil \sqrt[3]{n} \rceil = 1 \end{cases}$ rezultă $\begin{cases} n \in [3^2, 4^2) \cap \mathbb{N} \\ n \in [1^3, 2^3) \cap \mathbb{N} \end{cases}$ sistem care nu are soluții. Din $\begin{cases} \lceil \sqrt{n} \rceil = 2 \\ \lceil \sqrt[3]{n} \rceil = 2 \end{cases}$ rezultă

$\begin{cases} n \in [2^2, 3^2) \cap \mathbb{N} \\ n \in [2^3, 3^3) \cap \mathbb{N} \end{cases}$ sistem care are soluția $n = 8$ 2p

b) Evident funcția f este crescătoare și $f(0) = 0$.

Vom determina numerele naturale care nu sunt valori ale lui f , adică numerele $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(n) \neq k, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$ fie $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = a \in \mathbb{N}$ și $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = b \in \mathbb{N}$. Avem $f(n) = a + b$.

$$\text{Avem } \begin{cases} \lfloor \sqrt{n} \rfloor = a \\ \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq n < (a+1)^2 \\ b^3 \leq n < (b+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 < n+1 \leq (a+1)^2 \\ b^3 < n+1 \leq (b+1)^3 \end{cases} \text{ și atunci } \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor \in \{a, a+1\},$$

$$\lfloor \sqrt[3]{n+1} \rfloor \in \{b, b+1\}. \dots\dots\dots$$

2p

Avem $f(n+1) = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n+1} \rfloor \in \{a+b, a+b+1, a+b+2\}$. Pentru $f(n+1) = a+b+2$, $a+b+1 \notin \text{Im } f$ 1p

$$f(n+1) = a+b+2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = a+1 \\ \lfloor \sqrt[3]{n+1} \rfloor = b+1 \end{cases}, \text{ Cum } \begin{cases} a^2 < n+1 \leq (a+1)^2 \\ b^3 < n+1 \leq (b+1)^3 \end{cases}, \text{ rezultă } \begin{cases} n+1 = (a+1)^2 \\ n+1 = (b+1)^3 \end{cases}.$$

Cum $n+1 \geq 1$ Atunci există $c \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a+1 = c^3$, $b+1 = c^2$ și $n+1 = c^6$. Deci $f(c^6 - 1) = c^3 - 1 + c^2 - 1 = c^3 + c^2 - 2$ și $f(c^6) = c^3 + c^2$ și prin urmare $f(n) \neq c^3 + c^2 - 1$,

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $c \in \mathbb{N}^*$. Așadar $\text{Im } f = \mathbb{N} \setminus \{c^3 + c^2 - 1 \mid c \in \mathbb{N}^*\}$ 3p

Oficiu 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.