CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a V-a

Problema 1

Demonstrați că dacă numerele naturale *x, y, z* verifică egalitatea $6x+13y=7z$, atunci

$$(x+y)(y+z)(z+x)\vdots 182.$$

Problema 2

Fie $N=1^4+2^4\cdot3^4+4^4\cdot5^4\cdot6^4+...+67^4\cdot68^4\cdot...\cdot78^4$.

Să se determine ultimele 4 cifre ale numărului *N*.

Problema 3

Aflați numerele naturale x, y, z, t, dacă ele verifică relațiile:

$$x+12y+12z+102t=x+12y+102z+12t=xyzt=2023.$$

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 23 martie 2024

Clasa a V-a

Barem de evaluare şi notare

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1

Demonstrați că dacă numerele naturale x, y, z verifică egalitatea $6x+13y=7z$ *, atunci*

$$(x+y)(y+z)(z+x)\,\vdots\,182\ .$$

Soluţie

$6x+13y=7z\Rightarrow 13x+13y=7z+7x\Rightarrow 13(x+y)=7(x+z)$ 1p

Cum $(7,13)=1\Rightarrow (x+y)\,\vdots\,7$ și $(x+z)\,\vdots\,13$ 2p

$6x+13y=7z\Rightarrow 6x+20y=7y+7z$ 2p

$\Rightarrow 2(3x+10y)=7(z+y)$ 1p

Cum $(2,7)=1\Rightarrow (y+z)\,\vdots\,2$ 1p

Dar $182=2\cdot 13\cdot 7\Rightarrow (x+y)(y+z)(x+z)\,\vdots\,182$ 2p

Oficiu 1p

Problema 2

Fie $N=1^4+2^4\cdot 3^4+4^4\cdot 5^4\cdot 6^4+...+67^4\cdot 68^4\cdot...\cdot 78^4$. *Să se determine ultimele 4 cifre ale numărului N.*

Burlacu Oana

Soluţie

Se observă că $\left(4^4\cdot 5^4\cdot 6^4\right)\,\vdots\,10^4$

$\left(7^4\cdot 8^4\cdot 9^4\cdot 10^4\right)\,\vdots\,10^4$

....

$\left(67^4\cdot 68^4\cdot...\cdot 78^4\right)\,\vdots\,10^4$ 4p

$\Rightarrow \left(N-\left(1^4+2^4\cdot 3^4\right)\right)\,\vdots\,10^4$ 3p

Ultimele 4 cifre ale lui N sunt $1297=1^4+2^4\cdot 3^4$ 2p

Oficiu 1p

Problema 3

Aflați numerele naturale x, y, z, t, dacă ele verifică relațiile

$$x+12y+12z+102t = x+12y+102z+12t = xyzt = 2023.$$

George Florin Șerban, G. M. 1/2024

Soluție

$x+12y+12z+102t = x+12y+102z+12t \Rightarrow 90t = 90z$

$\Rightarrow t = z$ 2p

$xyz^2 = 2023$

Dar $2023 = 7 \cdot 17^2 \Rightarrow z = 1$ sau $z = 17$ 2p

Se observă că $z = 1$ nu convine 2p

Pentru $z = 17$ se obține $x = 1$ și $y = 7$ 3p

Oficiu 1p