CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC"
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a IX-a

Problema 1.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale. Notăm $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \geq 1$. Arătați că

$$\sqrt{s_n^2 + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} + \sqrt{s_n^2 + a_1(a_1-n)(a_1+a_n)^2} \in \mathbb{N}.$$

Gazeta Matematică

Problema 2.

Fie triunghiul ABC cu G centrul său de greutate și punctul M din interiorul triunghiului, $M \neq G$. Se construiesc punctele M_A, M_B, M_C simetricele lui M față de mijloacele laturilor (BC), (CA), respectiv (AB).

a) Arătați că dreptele AM_A, BM_B și CM_C sunt concurente într-un punct notat cu T.

b) Dacă G_1 este centrul de greutate al triunghiul $M_AM_BM_C$, arătați că punctele M, G, T, G_1 sunt coliniare, G este mijlocul lui (MG_1) și T este mijlocul lui (GG_1).

Problema 3.

Fie $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ o funcţie monotonă care pentru orice număr natural nenul n, verifică relaţia $f(f(n)) = n + f(1)$.

a) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare;

b) Să se determine funcţia f.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a IX-a
Barem de evaluare şi notare

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1
Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale. Notăm $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \geq 1$. Arătați că $\sqrt{s_n^2 + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} + \sqrt{s_n^2 + a_1(a_1-n)(a_1+a_n)^2} \in \mathbb{N}$.

Florin Rotaru, Focșani, G.M. 1/2024

Soluție
Avem $s_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ şi atunci

$$\sqrt{s_n^2 + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} = \sqrt{\frac{n^2(a_1+a_n)^2}{4} + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} =$$
$$= \frac{(a_1+a_n)}{2}\sqrt{n^2+4a_1(a_1+n)} = \frac{(a_1+a_n)}{2}\sqrt{(2a_1+n)^2}$$ 2p

Așadar $\sqrt{s_n^2 + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} = \dfrac{(a_1+a_n)|2a_1+n|}{2} = \dfrac{(a_1+a_n)(2a_1+n)}{2}$. 1p

Analog $\sqrt{s_n^2 + a_1(a_1-n)(a_1+a_n)^2} = \dfrac{(a_1+a_n)|2a_1-n|}{2}$. 3p

Avem
$$E = \sqrt{s_n^2 + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} + \sqrt{s_n^2 + a_1(a_1-n)(a_1+a_n)^2} = \frac{(a_1+a_n)(2a_1+n)}{2} + \frac{(a_1+a_n)|2a_1-n|}{2}$$ şi

atunci $E = 2a_1(a_1+a_n)$ sau $E = n(a_1+a_n)$, deci $E \in \mathbb{N}$. 3p

Oficiu 1p

Problema 2
Fie triunghiul ABC cu G centrul său de greutate și punctul M din interiorul triunghiului, $M \neq G$. Se construiesc punctele M_A, M_B, M_C simetricele lui M față de mijloacele laturilor (BC), (CA), respectiv (AB).

***a)** Arătați că dreptele AM_A, BM_B și CM_C sunt concurente într-un punct notat cu T.*

***

***b)** Dacă G_1 este centrul de greutate al triunghiul $M_AM_BM_C$, arătați că punctele M, G, T, G_1 sunt coliniare, G este mijlocul lui (MG_1) și T este mijlocul lui (GG_1).*

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluţie
a) Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor (BC), (CA), (AB). Deoarece A_1B_1 este linie mijlocie în triunghiurile CAB şi MM_AM_B rezultă că $AB \parallel M_BM_A$ şi $(AB) \equiv (M_BM_A)$.

Deci ABM_AM_B este parallelogram și atunci diagonalele sale au același mijloc. Notăm cu $\{T\} = AM_A \cap BM_M$. Analog se arată că T este mijlocul lui CM_C 2p

b) Soluția 1. Fie A_1 mijlocul lui (BC). Deoarece T este mijlocul lui (AM_A), avem $\overrightarrow{MT} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MM_A}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + 2\cdot\overrightarrow{MA_1}\right)$. Din $\frac{AG}{GA_1} = 2$, rezultă că $\overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MA} + 2\cdot\overrightarrow{MA_1}}{3}$ și imediat

$$\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MT} \quad (1)$$

Deci punctele M, G, T sunt coliniare.. 3p

Cum G_1 este centrul de greutate al triunghiul $M_AM_BM_C$, folosind relația lui Leibniz, avem $3\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GM_A} + \overrightarrow{GM_B} + \overrightarrow{GM_C}$. Avem $\overrightarrow{GM_A} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM_A}$ și atunci $3\overrightarrow{GG_1} = \sum\overrightarrow{GM_A} = \sum\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM_A}\right) = \sum\overrightarrow{AM_A}$, deoarece $\sum\overrightarrow{GA} = \vec{0}$ (G este centrul de greutate al triunghiului ABC). Avem $\overrightarrow{AM_A} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM_A} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Atunci $3\overrightarrow{GG_1} = \sum\overrightarrow{AM_A} = \sum\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = \sum\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG}$,(formula lui Leibniz pentru triunghiul ABC) deci

$$\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{MG} \quad (2)$$

Ceea ce înseamnă că punctele M, G, G_1 sunt coliniare (deci M, G, T, G_1 sunt coliniare) și G este mijlocul lui (MG_1). 3p

Din (1) și (2), avem $3\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MT} = 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GT}\right) \Rightarrow 2\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GT} + \overrightarrow{TG_1}$, deci $\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{TG_1}$ ceea ce înseamnă că T este mijlocul lui (GG_1).. 1p

b) Soluția 2. Folosim vectorii de poziție în rezolvarea acestui subpunct. De la a) avem $\vec{r}_T = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_{M_A}}{2}$ și cum $\vec{r}_M + \vec{r}_{M_A} = \vec{r}_B + \vec{r}_C$, avem $\vec{r}_T = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_M\right)$, relație care, ținând cont de vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi, devine $\vec{r}_T = \frac{1}{2}\left(3\cdot\vec{r}_G - \vec{r}_M\right)$, sau $2\vec{r}_T = 3\cdot\vec{r}_G - \vec{r}_M \Leftrightarrow 2\left(\vec{r}_T - \vec{r}_G\right) = \vec{r}_G - \vec{r}_M$, sau $2\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{MG}$, ceea ce înseamnă că punctele M, G, T sunt coliniare. 3p

Avem $\vec{r}_{G_1} = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_{M_A} + \vec{r}_{M_B} + \vec{r}_{M_C}\right) = \frac{1}{3}\left(\sum\left(\vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_M\right)\right) = \frac{1}{3}\left(2\sum\vec{r}_A - 3\vec{r}_M\right) = 2\vec{r}_G - \vec{r}_M$, sau $\vec{r}_{G_1} - \vec{r}_G = \vec{r}_G - \vec{r}_M \Leftrightarrow \overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{MG}$, ceea ce înseamnă că punctele M, G, G_1 sunt coliniare și G este mijlocul lui (MG_1). 3p

Rezultă atunci că punctele M, G, T, G_1 sunt coliniare.

Din (1) și (2), avem $2\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GT} + \overrightarrow{TG_1}$, adică $\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{TG_1}$, ceea ce înseamnă că T este mijlocul lui (GG_1). 1p

Oficiu 1p

Problema 3

Fie $f: N^* \to N^*$ *o funcţie monotonă care pentru orice număr natural nenul* n*, verifică relaţia:* $f(f(n)) = n + f(1)$.

a) Să se arate că funcţia f *este strict crescătoare;*

b) Să se determine funcţia f.

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție.

Avem

$$f(f(n)) = n + f(1),\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Dacă aplicăm f relaţiei (1), avem $f\left(f\left(f(n)\right)\right) = f\left(n + f(1)\right)$ şi înlocuind tot în (1) n cu *f(n)*, avem $f\left(f\left(f(n)\right)\right) = f(n) + f(1)$. Deci

$$f\left(n + f(1)\right) = f(n) + f(1),\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ (2)$$

.... 1p

a) Demonstrăm întâi că funcţia este strict monotonă. Dacă prin absurd, f nu este strict monotonă, atunci $\exists n, p \in \mathbb{N}^*$, $n \neq p$, astfel încât $f(n) = f(p)$. Atunci $f(f(n)) = f(f(p))$ şi deci $n + f(1) = p + f(1)$, ceea ce este o contradicţie cu $n \neq p$. Deci f este strict monotonă.

Demonstrăm în continuare că f este strict crescătoare. Presupunem prin absurd că f nu este strict crescătoare. Cum f este strict monotonă, atunci f este strict descrescătoare și atunci $f\left(n + f(1)\right) - f(n) < 0$ și ținând cont de (2), rezultă că $f\left(1\right) < 0$, ceea ce este o contradicție .

Așadar funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{N}^*$. 3p

b). Cum $f(n+1) > f(n)$, $f(n), f(n+1)$ numere naturale, atunci $f(n+1) \geq f(n) + 1$ şi atunci $\sum_{k=0}^{m-1}\left(f\left(n+k+1\right) - f\left(n+k\right)\right) \geq \sum_{k=0}^{m-1} 1$, adică $f\left(n+m\right) - f\left(n\right) \geq m$, deci

$$f\left(n+m\right) \geq f\left(n\right) + m,\ \forall m, n \in \mathbb{N}^* \ (3)$$

Fie $p = f(1)$, atunci relația (2) se scrie:

$$f(n+p) = f(n) + p \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ (4)$$

.... 2p

Dacă în relaţia din enunţ, facem $n = 1$, obţinem $f\left(f(1)\right) = 1 + p$, adică

$$f(p) = 1 + p \quad (5)$$

Cum $f(p) = 1 + p > p = f(1)$, atunci $p > 1$ şi folosind relaţiile (1) şi (3), avem $p + 1 = f(p) = f(1 + (p-1)) \geq f(1) + p - 1 = 2p - 1$, de unde $p \leq 2$. Din $p > 1$ şi $p \leq 2$, rezultă $p = 2$, deci $f\left(1\right) = 2$. Imediat din (5), obținem $f\left(2\right) = 3$, iar (4) devine

$$f\left(n+2\right) = f(n) + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (6)$$

Prin inducţie se demonstrează că pentru orice $n, k \in \mathbf{N}^*$, are loc relaţia:

$$f\left(n + 2k\right) = f(n) + 2k \quad (4)$$

Imediat $f\left(1 + 2k\right) = 2 + 2k$ şi $f\left(2 + 2k\right) = 3 + 2k$, deci $f\left(n\right) = n + 1$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. ... 3p

Oficiu 1p