CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a VIII-a

Problema 1

Fie n un număr natural nenul și $x_1, x_2, ..., x_n \in \{-1,1\}$. Arătați că dacă

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + ... + x_2x_n + ... + x_{n-1}x_n = 0,$$

atunci n este pătrat perfect.

Problema 2

Aflați $n \in \mathbb{N}$ pentru care

$$2 \cdot \left[\frac{1^2}{2}\right] + 2^2 \cdot \left[\frac{2^2}{3}\right] + ... + 2^n \cdot \left[\frac{n^2}{n+1}\right] = 2^{2025} \cdot 2022 + 4,$$

unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

Gazeta Matematică

Problema 3

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = \sqrt{2}$ cm . În interiorul bazei $ABCD$ se consideră punctul M astfel încât $\measuredangle MCD = \measuredangle MDC = 30^\circ$.

a) Demonstrați că distanța de la punctul M la planul (ABC') este mai mică decât $\frac{3}{4}$ cm.

b) Calculați sinusul unghiului format de planele $(MD'C')$ și $(MA'B')$.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „GHEORGHE MIHOC” EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a VIII-a

Bareme de evaluare şi notare

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem se acordă punctaj maxim.

Problema 1

Fie n un număr natural nenul și $x_1, x_2, ..., x_n \in \{-1,1\}$. *Arătați că dacă*

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + ... + x_2x_n + ... + x_{n-1}x_n = 0,$$

atunci n este pătrat perfect.

Soluție

Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in \{-1,1\}$, atunci termenii sumei sunt egali cu 1 sau -1.

Pentru ca suma lor să fie egală cu 0, trebuie ca jumătate din ei să fie +1 și cealaltă jumătate să fie -1...2p

Numărul termenilor sumei este $\frac{n(n-1)}{2}$ şi astfel vom avea $\frac{n(n-1)}{4}$ termeni egali cu +1 şi $\frac{n(n-1)}{4}$ termeni egali cu -1 (1)...2p

Considerăm că numărul elementelor x_i egale cu -1 este *k*, de unde rezultă că numărul celor egale cu +1 este $n-k$ 2p

Numărul termenilor de forma x_ix_j egali cu -1 va fi $k(n-k)$ și, folosind relația (1), se obține egalitatea $k(n-k) = \frac{n(n-1)}{4} \Leftrightarrow kn - k^2 = \frac{n^2-n}{4} \Leftrightarrow 4kn - 4k^2 = n^2 - n$ 2p

Relația este echivalentă cu $4k^2 - 4kn + n^2 = n$, de unde se obține $n = (2k-n)^2$ 1p

Oficiu...1p

Problema 2

Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ *pentru care*

$$2 \cdot \left[\frac{1^2}{2}\right] + 2^2 \cdot \left[\frac{2^2}{3}\right] + ... + 2^n \cdot \left[\frac{n^2}{n+1}\right] = 2^{2025} \cdot 2022 + 4,$$

unde $[x]$ *este partea întreagă a numărului real x.*

Mihaela Berindeanu, G.M. nr.1/2024

Soluție

$$\left[\frac{k^2}{k+1}\right]=\left[\frac{k^2-1+1}{k+1}\right]=\left[\frac{(k-1)(k+1)+1}{k+1}\right]=\left[k-1+\frac{1}{k+1}\right]=k-1, \forall k\in\mathbb{N}^*$$ 3p

Ecuația se rescrie $2\cdot 0+2^2\cdot 1+2^3\cdot 2+...+2^n\cdot(n-1)=2^{2025}\cdot 2022+4$ 1p

$2^2\cdot 1+2^3\cdot 2+...+2^n\cdot(n-1)=2^{n+1}(n-1)-(2^2+2^3+...+2^n)=2^{n+1}(n-1)-2^{n+1}+4$ 3p

Ecuația devine $2^{n+1}(n-1)-2^{n+1}+4=2^{2025}\cdot 2022+4$

$2^{n+1}(n-2)=2^{2025}\cdot 2022 \Leftrightarrow n=2024$ 2p

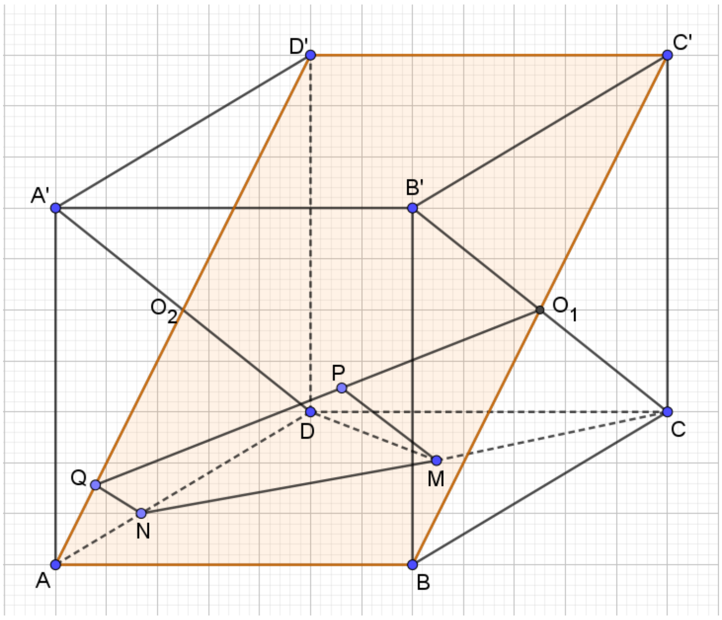
Oficiu...1p

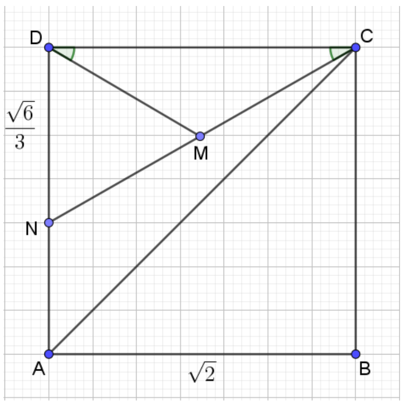
Problema 3

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=\sqrt{2}$ cm. În interiorul bazei $ABCD$ se consideră punctul M astfel încât $\sphericalangle MCD=\sphericalangle MDC=30^\circ$.

a) *Demonstrați că distanța de la punctul M la planul (ABC') este mai mică decât $\frac{3}{4}$ cm.*

b) *Calculați sinusul unghiului format de planele $(MD'C')$ și $(MA'B')$.*





Soluție

a) Fie $CM \cap AD = \{N\}$, O_1 centrul pătratului *BCC'B'*, O_2 centrul pătratului *ADD'A*

$DO_2 \perp (ABC')$, $NQ \perp AD', Q \in AD', NQ \| DO_2 \Rightarrow NQ \perp (ABC')$..1p

$CO_1 \perp (ABC'), NQ \perp (ABC'), C, M, N$ coliniare $\Rightarrow$proiecțiile lor pe planul (ABC') sunt coliniare și dacă $MP \perp (ABC')$, atunci O_1, P, Q sunt coliniare și $CO_1 \| MP \| NQ$.................1p

Triunghiul *CDM* este isoscel, cu unghiurile de la bază egale cu 30°. În triunghiul *CDN* dreptunghic și cu unghiul *C* cu măsura de 30°, se demonstrează că triunghiul *DMN* este echilateral cu latura $DN = \frac{\sqrt{6}}{3}$ cm și *M* este mijlocul laturii *NC*...1p

În trapezul $CNQO_1$, *MP* este linie mijlocie și $MP = \frac{CO_1 + NQ}{2}$, $CO_1 = 1$cm

$\triangle ANQ \sim \Delta ADO_2 \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{NQ}{DO_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{NQ}{1} \Rightarrow NQ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 2p

$MP = \frac{1 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} < \frac{3}{4}$..1p

b) $(MA'B') \cap (MD'C') = ST, S \in AD, T \in BC$ și *S*, *M*, *T* coliniare

Triunghiurile *MA'B'* și *MC'D'* sunt isoscele iar *MR* și *MG* sunt mediane și înălțimi în aceste triunghiuri

$MR \perp A'B', A'B' \| ST \Rightarrow MR \perp ST$, $MG \perp D'C', D'C' \| ST \Rightarrow MG \perp ST$ 2p

$\measuredangle((MA'B'),(MD'C')) = \measuredangle(MR, MG) = \measuredangle(RMG)$

$A_{\triangle RMG} = 1cm^2$, $A_{\triangle RMG} = \frac{MR \cdot MG \cdot \sin RMG}{2} \Rightarrow \sin RMG = \frac{2}{MR \cdot MG}$ 1p

Oficiu...1p