CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a VII-a

Problema 1

Să se arate că:

a) $N=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+...+\sqrt{199-2\sqrt{9900}}$ este număr natural.

b) $3\sqrt{a^2+1}+2\sqrt{a^2+2}+\sqrt{a^2+3}\le\frac{3a^2+20}{2}, \forall a\in\mathbb{R}$.

Problema 2

Se consideră numerele naturale nenule $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}$, cu $n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât

$$2\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{3}{a_3a_4}+...+\frac{n}{a_na_{n+1}}\right)\ge n(n+1).$$

Calculați $\sqrt{a_1a_2a_3...a_{n+1}}\cdot(a_1+a_2+a_3+...+a_{n+1})^{-2}$.

Gazeta Matematică

Problema 3

Fie $\triangle ABC$ cu lungimile laturilor $BC=a, AC=b, AB=c$ astfel încât $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$. Dacă $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, $D\in BC$, M este mijlocul laturii AC și $ME \parallel AD, E\in BC$, să se calculeze ce procent din aria triunghiului ABC reprezintă aria triunghiului MEC.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a VII-a
Barem de evaluare şi notare

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1

Să se arate că:

a) $N=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+...+\sqrt{199-2\sqrt{9900}}$ *este număr natural.*

b) $3\sqrt{a^2+1}+2\sqrt{a^2+2}+\sqrt{a^2+3}\le\frac{3a^2+20}{2},\forall a\in\mathbb{R}$.

Mioara Tudor

Soluție

a) $\sqrt{k+k+1-2\sqrt{k(k+1)}}=\sqrt{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ pentru orice $k\in\{1,2,3,...,99\}$........3p

Atunci $N=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{100}-\sqrt{99}=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9\in\mathbb{N}$...........2p

b) Relația este echivalentă cu $\left(\sqrt{a^2+1}-3\right)^2+\left(\sqrt{a^2+2}-2\right)^2+\left(\sqrt{a^2+3}-1\right)^2\ge 0$ 4p

Oficiu...1p

Problema 2

Se consideră numerele naturale nenule $a_1,a_2,a_3,...,a_n,a_{n+1}$, *cu* $n\in\mathbb{N}^*$, *astfel încât*
$2\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{3}{a_3a_4}+...+\frac{n}{a_na_{n+1}}\right)\ge n(n+1)$. *Calculați* $\sqrt{a_1a_2a_3...a_{n+1}}\cdot(a_1+a_2+a_3+...+a_{n+1})^{-2}$.

Gheorghe Molea, G. M. 1/2024

Soluție

Cum $a_k\in\mathbb{N}^*,\forall k\in\{1,2,3,...,n,n+1\}\Rightarrow a_ka_{k+1}\ge 1\Rightarrow\frac{1}{a_ka_{k+1}}\le 1\Rightarrow\frac{k}{a_ka_{k+1}}\le k$ 3p

Atunci $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{3}{a_3a_4}+...+\frac{n}{a_na_{n+1}}\le 1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ……………………..………2p

Dar $2\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{3}{a_3a_4}+...+\frac{n}{a_na_{n+1}}\right)\geq n(n+1)$, deci

$2\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{3}{a_3a_4}+...+\frac{n}{a_na_{n+1}}\right)=n(n+1)$, care se obține pentru

$a_ka_{k+1}=1,\forall k\in\{1,2,3,...,n\}\Rightarrow a_k=1,\forall k\in\{1,2,3,...,n,n+1\}$ 2p

Atunci $\sqrt{a_1a_2a_3...a_{n+1}}\cdot(a_1+a_2+a_3+...+a_{n+1})^{-2}=1\cdot(n+1)^{-2}=\frac{1}{(n+1)^2}$ 2p

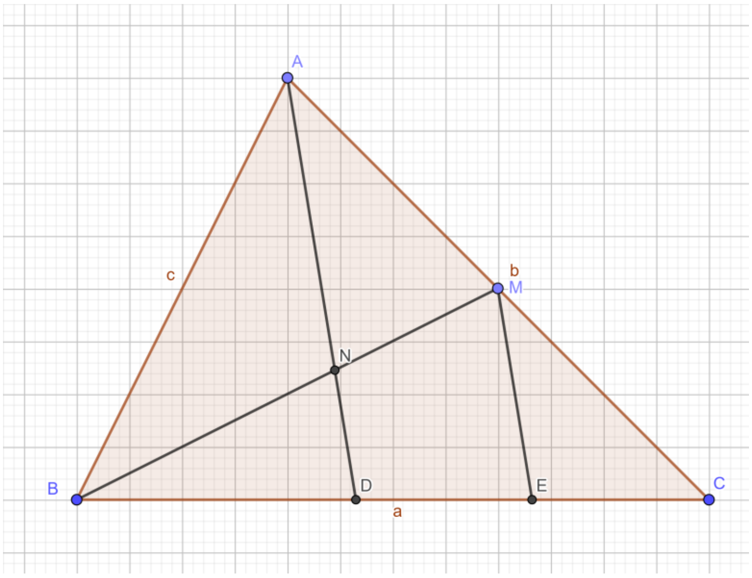
Oficiu...1p

Problema 3

Fie $\triangle ABC$ cu lungimile laturilor $BC=a, AC=b, AB=c$ astfel încât $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$. Dacă $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, $D\in BC$, M este mijlocul laturii AC și $ME\parallel AD, E\in BC$, să se calculeze ce procent din aria triunghiului ABC reprezintă aria triunghiului MEC.

Mioara Tudor

Soluție



Cum $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC

$\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{BD}{a}=\frac{c}{b+c}\Rightarrow BD=\frac{ac}{b+c},CD=\frac{ab}{b+c}$ 3p

M este mijlocul segmentului $AC, ME\parallel AD\Rightarrow E$ este mijlocul segmentului DC 1p

$\Rightarrow CE=\frac{DC}{2}=\frac{ab}{2(b+c)}\Rightarrow A_{\triangle MEC}=\frac{CE\cdot\frac{h}{2}}{2}=\frac{abh}{8(b+c)}$, unde $h=d(A,BC)$ 2p

BM mediană $\Rightarrow A_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} A_{\triangle ABC} = \frac{ah}{4} \Rightarrow A_{\triangle MEC} = \frac{b}{4(b+c)} \cdot A_{\triangle ABC}$ 2p

Dacă $\frac{b}{c} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{b+c} = \frac{3}{5} \Rightarrow A_{\triangle MEC} = \frac{3}{20} \cdot A_{\triangle ABC} = \frac{15}{100} \cdot A_{\triangle ABC}$, deci $A_{\triangle MEC}$ reprezintă 15% din $A_{\triangle ABC}$ 1p

Oficiu...1p