CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a VI-a

Problema 1.

a) Știind că $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât $\frac{2023}{1+\frac{y}{x}}+\frac{2024}{1+\frac{z}{y}}+\frac{2025}{1+\frac{x}{z}}=2024$, calculați

$$\frac{2022x-y}{x+y}+\frac{2023y-z}{y+z}+\frac{2024z-x}{z+x}.$$

b) Determinați cardinalul mulțimii

$$A=\left\{\overline{ab}\in\mathbb{N} \middle| \ \frac{9a+3b}{a+2b}\in\mathbb{N} \text{ si } \frac{2a+4b}{3a+b}\in\mathbb{N}\right\}.$$

Problema 2.

Două numere naturale x și y verifică relația $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$, iar x^5+y^5 se divide cu x^2y^2.

Demonstrați că $xy \geq 10^5$.

Problema 3.

Fie $\triangle ABC$ cu $\measuredangle BAC=90^o$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor ABC și ACB intersectează laturile AC și AB în punctele N și respectiv M. Notăm cu P și Q picioarele perpendicularelor duse din M și N pe BC. Aflați măsura unghiului PAQ.

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a VI-a
Barem de evaluare şi notare

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1.

a) Știind că $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$ *astfel încât* $\dfrac{2023}{1+\dfrac{y}{x}}+\dfrac{2024}{1+\dfrac{z}{y}}+\dfrac{2025}{1+\dfrac{x}{z}}=2024$, *calculați*

$$\frac{2022x-y}{x+y}+\frac{2023y-z}{y+z}+\frac{2024z-x}{z+x}.$$

b) Determinați cardinalul mulțimii

$$A=\left\{\overline{ab}\in\mathbb{N} \middle| \frac{9a+3b}{a+2b}\in\mathbb{N} \text{ si } \frac{2a+4b}{3a+b}\in\mathbb{N}\right\}.$$

Soluție:

a) $\dfrac{2023x}{x+y}+\dfrac{2024y}{y+z}+\dfrac{2025z}{z+x}=2024$ .... 1 p

$\dfrac{2023x}{x+y}-1+\dfrac{2024y}{y+z}-1+\dfrac{2025z}{z+x}-1=2021$ .... 2 p

$\dfrac{2022x-y}{x+y}+\dfrac{2023y-z}{y+z}+\dfrac{2024z-x}{z+x}=2021$ .... 1 p

b) Fie $m=\dfrac{9a+3b}{a+2b}$ și $n=\dfrac{2a+4b}{3a+b}$ $m,n\in\mathbb{N}$ obținem $m\cdot n=6$ .... 1 p

Cum $m\cdot n=6$ și $m,n\in$ $\mathbb{N}$ avem soluțiile

$\begin{cases} m=6 \\ n=1 \end{cases}$, $\begin{cases} m=1 \\ n=6 \end{cases}$ $\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$, $\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$, ...1 p

de unde obținem $A=\{12,17,24,31,36,48,62,93\}$ și $cardA=8$ ....3 p

Oficiu..1 p

Problema 2.

Două numere naturale x și y verifică relația $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$, iar x^5+y^5 se divide cu x^2y^2. Demonstrați că $xy\geq 10^5$.

Soluție:

Cum $5x=2y\Rightarrow x$ este par $\Rightarrow x=2k, k\in\mathbb{N}^*$, iar $y=5k$ 2p

$x^2y^2=100k^4$ și $x^5+y^5=3157k^5$ 2p

$x^2y^2\,|\,x^5+y^5\Rightarrow 100k^4\,|\,3157k^5\Rightarrow 100\,|\,3157k$ 1p

Cum 100 și 3157 sunt prime între ele $\Rightarrow 100\,|\,k\Rightarrow k=100p, p\in\mathbb{N}^*$ 2p

$xy=10k^2=10\cdot(100p)^2=10^5p\Rightarrow xy\geq 10^5$ 2p

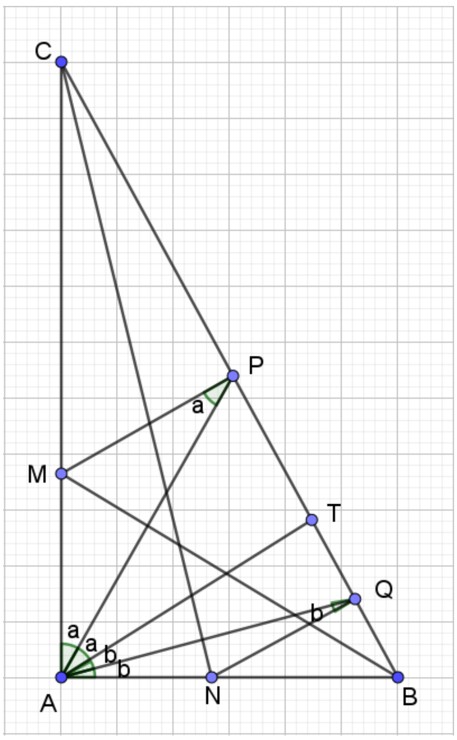
Oficiu...1p

Problema 3.

Fie $\triangle ABC$ cu $\measuredangle BAC=90^o$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor ABC și ACB intersectează laturile AC și AB în punctele M și respectiv N. Notăm cu P și Q picioarele perpendicularelor duse din M și N pe BC. Aflați măsura unghiului PAQ.

Victor Felecan, G. M. 1/2024

Soluție



BM bisectoarea $\measuredangle ABC \Rightarrow MA = MP \Rightarrow \triangle MAP$ isoscel $\Rightarrow \measuredangle MAP = \measuredangle MPA \overset{not}{=} a$ ………….......... 2p

Fie $AT \perp BC, T \in BC$, cum $MP \perp BC \Rightarrow MP \,||\, AT \Rightarrow \measuredangle MPA = \measuredangle PAT = a$ (alterne interne)…2p

Analog $\triangle ANQ$ isoscel $\Rightarrow \measuredangle QAN = \measuredangle AQN \overset{not}{=} b$ ……………………………………………….. 2p

$AT \perp BC$ și $NQ \perp BC \Rightarrow AT \,||\, NQ \Rightarrow \measuredangle AQN = \measuredangle TAQ = b$ (alterne interne) ……………..…..2p

$\measuredangle BAC = 2a + 2b \Rightarrow 90^o = 2a + 2b \Rightarrow a + b = 45^o \Rightarrow \measuredangle PAQ = 45^o$ …………………………..1p

Oficiu……………………………………………………………………………………...1p