# CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
# „GHEORGHE MIHOC"
# EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

## Clasa a XII-a

### Problema 1

Aflați $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, astfel încât $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a+2x\sqrt{1-x^2}}}dx = \frac{\pi}{4}$.

Gazeta Matematică

### Problema 2

Fie $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo $n$, $n \geq 2$ și mulțimea $A(\mathbb{Z}_n)=\left\{x \in \mathbb{Z}_n \middle| x^2-x+\hat{1}=\hat{0}\right\}$.

**a)** Dacă $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$, demonstrați că $\alpha$ este inversabil și $\alpha^{-1}=\alpha^5$.

**b)** Dacă mulțimea $A(\mathbb{Z}_n)$ are un singur element, arătați că $n=3$.

**c)** Dacă $n$ este un număr prim de forma $n=6k+5, k \in \mathbb{N}$, atunci $A(\mathbb{Z}_n)$ este mulțimea vidă.

### Problema 3

Să se arate că $\frac{49}{36e} \leq \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{e^x+1}dx \leq \ln\frac{e+1}{2}$.

**Toate subiectele sunt obligatorii.**
**Timp de lucru 3 ore.**
**Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.**

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

**Clasa a XII-a**
**Barem de evaluare şi notare**

**Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.**

**Problema 1**

*Aflați* $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, *astfel încât* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a+2x\sqrt{1-x^2}}}dx = \frac{\pi}{4}$.

*Romanța și Ioan Ghiță, Blaj, G.M. 1/2024*

**Soluție**

Fie $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a+2x\sqrt{1-x^2}}}dx$, Cu schimbarea de variabilă $x = \sin t$ ($x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$,

$dx = \cos t dt$), avem $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{a+\sin 2t}}dt$ ........................................................................................ 2p

Cu schimbarea de variabilă $x = \cos t$ ($x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = 1 \Rightarrow t = 0$, $dx = -\sin t dt$), avem

$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\sin t}{\sqrt{a+\sin 2t}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{a+\sin 2t}}dt$. ........................................................................................ 2p

Atunci $2I == \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t+\sin t}{\sqrt{a+\sin 2t}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t+\sin t}{\sqrt{a+1-(\sin t-\cos t)^2}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t-\cos t)'}{\sqrt{a+1-(\sin t-\cos t)^2}}dt$. ................ 2p

deci $2I = \arcsin \frac{\sin t-\cos t}{\sqrt{a+1}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{a+1}}$. Așadar $I = \arcsin\frac{1}{\sqrt{a+1}} = \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = 1$

. ........................................................................................................................................ 3p

Oficiu........................................................................................................................................1p

**Problema 2**

*Fie* $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ *inelul claselor de resturi modulo* $n$, $n \geq 2$ *și mulțimea*
$A(\mathbb{Z}_n) = \left\{ x \in \mathbb{Z}_n \middle| x^2 - x + \hat{1} = \hat{0} \right\}$.

***a)*** *Dacă* $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$, *demonstrați că* $\alpha$ *este inversabil și* $\alpha^{-1} = \alpha^5$.

***b)*** *Dacă mulțimea* $A(\mathbb{Z}_n)$ *are un singur element, arătați că* $n = 3$.

***c)*** *Dacă* $n$ *este un număr prim de forma* $n = 6k+5, k \in \mathbb{N}$, *atunci* $A(\mathbb{Z}_n)$ *este mulțimea vidă.*

*Nicolae Papacu, Slobozia*

**Soluție**

**a)** Fie $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$, atunci $\alpha^3+\hat{1}=(\alpha+\hat{1})(\alpha^2-\alpha+\hat{1})=\hat{0}$, adică $\alpha^3=-\hat{1}$ și deci $\alpha^6=1$, ceea ce înseamnă $\alpha$ este inversabil și $\alpha^{-1}=\alpha^5$. ........................................................................ 2p

**b)** Fie $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$ singurul element al lui $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$. Din $\alpha^2-\alpha+\hat{1}=\hat{0}$, rezultă $\alpha(\hat{1}-\alpha)=(\hat{1}-\alpha)\alpha=\hat{1}$, ceea ce însemnă că $\alpha^{-1}=\hat{1}-\alpha$. Din $\hat{0}=\alpha^2-\alpha+\hat{1}=\alpha^2(\hat{1}-\alpha^{-1}+\alpha^{-2})$, și $\alpha^2$ inversabil, rezultă $\alpha^{-2}-\alpha^{-1}+\hat{1}=\hat{0}$, deci $\alpha^{-1}\in A(\mathbb{Z}_n)$. Din unicitate, avem $\alpha^{-1}=\alpha$, adică $\hat{1}-\alpha=\alpha \Leftrightarrow \hat{2}\alpha=\hat{1}$, de unde $\hat{2}=\alpha^{-1}$. Dar $\alpha^{-1}\in A(\mathbb{Z}_n)$ și atunci $\hat{4}-\hat{2}+\hat{1}=\hat{0}$, adică $\hat{3}=\hat{0}$ și deci n=3 ........................................................................ 3p

**c)** Presupunem că mulțimea $A(\mathbb{Z}_n)$ are cel puțin un element și fie $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$. Din primul subpunct avem $\alpha^6=\hat{1}$. Cum $n$ este un număr prim atunci $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ este corp și prin urmare $(\mathbb{Z}_n^*,\cdot)$ este grup comutativ cu $n-1$ elemente. Rezultă $\alpha^{n-1}=\hat{1}$ (Eventual se poate scrie direct din mica teoremă a lui Fermat), deci $\alpha^{6k+4}=\hat{1}$. Cum $\alpha^6=\hat{1}$, rezultă $\hat{1}=\alpha^{6k+4}=\alpha^{6k}\cdot\alpha^4=\alpha^4$ și $\hat{1}=\alpha^6=\alpha^2\cdot\alpha^4=\alpha^2$. Atunci din $\alpha^2-\alpha+\hat{1}=\hat{0}$, rezultă $\hat{1}-\alpha+\hat{1}=\hat{0}$, deci $\alpha=\hat{2}$ și atunci $\hat{0}=\alpha^2-\alpha+\hat{1}=\hat{4}-\hat{2}+\hat{1}=\hat{3}$, ceea ce nu este posibil în $\mathbb{Z}_n$ pentru $n=6k+5, k\in\mathbb{N}$. Așadar $A(\mathbb{Z}_n)=\Phi$. ........................................................................ 4p

Oficiu........................................................................................................1p

**Problema 3**

Să se arate că $\dfrac{49}{36e}\le\displaystyle\int_0^1\frac{e^{x^2}}{e^x+1}dx\le\ln\frac{e+1}{2}$.

*Mioara Tudor*, Slobozia

**Soluție**

Pentru $x\in[0,1]$, avem $e^{x^2}\le e^x$ și atunci $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{x^2}}{e^x+1}dx\le\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln(e^x+1)\Big|_0^1=\ln\frac{e+1}{2}$. ..... 3p

Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz în formă integrală, avem că:

$$\left(\int_0^1\sqrt{e^{x^2}}dx\right)^2=\left(\int_0^1\sqrt{\frac{e^{x^2}}{e^x+1}}\cdot\sqrt{e^x+1}dx\right)^2\le\left(\int_0^1\frac{e^{x^2}}{e^x+1}dx\right)\left(\int_0^1(e^x+1)dx\right).$$ ............................... 2p

Deoarece $\displaystyle\int_0^1(e^x+1)dx=e$, avem $e\cdot\displaystyle\int_0^1\frac{e^{x^2}}{e^x+1}dx\ge\left(\int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2$. ........................................... 1p

Folosind inegalitatea cunoscută $e^x\ge 1+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, avem $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}}dx\ge\int_0^1\left(1+\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(x+\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{6}$.

........................................................................................................ 2p

Atunci $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{x^2}}{e^x+1}dx\ge\frac{1}{e}\left(\int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2\ge\frac{49}{36e}$. ........................................................ 1p

Oficiu........................................................................................................1p