CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC"
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a XI-a

Problema 1

Fie $A, B \in M_3(\mathbb{Z})$ două matrice simetrice. Demonstrați că există numerele întregi a, b, c astfel încât $(AB - BA)^3 = -(a^2 + b^2 + c^2)(AB - BA)$.
(O matrice este simetrică dacă este egală cu transpusa sa)

Problema 2

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \sqrt{(n+1)x_n}$, pentru orice număr natural $n \geq 1$.
a) Arătați că $x_n < n-1$ pentru orice $n \geq 4$.
b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - n)$.

Problema 3

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție neconstantă cu proprietatea lui Darboux. Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, există $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n \in [a, b]$ cu $c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, astfel încât numerele $f(c_0), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice neconstante.

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a XI-a
Barem de evaluare şi notare

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1

Fie $A, B \in M_3(\mathbb{Z})$ *două matrice simetrice. Demonstrați că există numerele întregi* a, b, c *astfel încât* $(AB-BA)^3 = -(a^2+b^2+c^2)(AB-BA)$.
(O matrice este simetrică dacă este egală cu transpusa sa)

Rică Zamfir, București

Soluție

Notăm $C = AB - BA$ și cum $A^t = A$, $B^t = B$, avem
$C^t = (AB-BA)^t = (AB)^t - (BA)^t = B^t A^t - A^t B^t = BA - AB = -C$. 3p
Deci matricea C este antisimetrică și prin urmare $a_{ii} = 0$, $i \in \{1,2,3\}$ și $a_{ji} = -a_{ij}$, $i < j$,
$i, j \in \{1,2,3\}$. Notând $a_{12} = a$, $a_{13} = b$, $a_{23} = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, avem $C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$. 1p

Prin calcul, avem $C^2 = \begin{pmatrix} -a^2-b^2 & -bc & ac \\ -bc & -a^2-c^2 & -ab \\ ac & -ab & -b^2-c^2 \end{pmatrix}$ 2p

și $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -a(a^2+b^2+c^2) & -b(a^2+b^2+c^2) \\ a(a^2+b^2+c^2) & 0 & -c(a^2+b^2+c^2) \\ b(a^2+b^2+c^2) & c(a^2+b^2+c^2) & 0 \end{pmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)C$ 3p

Observație. Pentru matricea $AB - BA = C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, cum $trC = tr(AB-BA) = 0$,
$\det C = \det C^t = \det(-C) = -\det C$, adică $\det C = 0$,
$tr(A^*) = \begin{vmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)$, atunci folosind formula Cayley – Hamilton
$C^3 = (trC)C^2 - (trC^*)C + (\det C)I_3$, avem $C^3 = -(a^2+b^2+c^2)C$.
Oficiu 1p

Problema 2

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ *dat prin* $x_1=1$ *și* $x_{n+1}=\sqrt{(n+1)x_n}$, *pentru orice număr natural* $n\geq 1$.

***a)** Arătați că* $x_n<n-1$ *pentru orice* $n\geq 4$.

***b)** Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-n)$.

Marin Ionescu, Pitești

Soluție

a) Se demonstrează prin inducție că $x_n<n-1$, $\forall n\geq 4$: $x_4^4=48\sqrt{2}<81=3^4$,

$x_{k+1}=\sqrt{(k+1)x_k}\leq\sqrt{(k+1)(k-1)}=\sqrt{k^2-1}<k$, $k\geq 4$. 2p

b) Se demonstrează prin inducție că $x_n\geq n-2$, $\forall n\geq 4$: $x_4^4=48\sqrt{2}>16=2^4$,

$x_{k+1}=\sqrt{(k+1)x_k}\geq\sqrt{(k+1)(k-2)}=\sqrt{k^2-k-2}>\sqrt{k^2-4k+4}=k-2$, $k\geq 4$.

Din $n-2\leq x_n\leq n-1$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$. 2p

Cum $x_n<n-1$ pentru orice $n\geq 4$, rezultă că $x_n<n-1$ pentru orice $n\geq 6$.

Se demonstrează prin inducție că $x_n\geq n-1-\frac{6}{n}$, $\forall n\geq 6$:

$$x_6=\sqrt{6\sqrt{5\sqrt{4\sqrt{3\sqrt{2}}}}}=\sqrt{6\sqrt{5\cdot 2\sqrt{\sqrt{3\sqrt{2}}}}}>\sqrt{6\sqrt{10}}>\sqrt{6\cdot 3}>4=5-\frac{6}{6},$$

$x_{k+1}^2=(k+1)x_k\geq(k+1)\left(k-1-\frac{6}{k}\right)=k^2-1-\frac{6(k+1)}{k}=k^2-7-\frac{6}{k}\geq k^2-8$. Arătăm că

$$k^2-8\geq\left(k-\frac{6}{k+1}\right)^2\Leftrightarrow k^2-8\geq k^2-\frac{12k}{k+1}+\frac{36}{(k+1)^2}\Leftrightarrow\frac{4k-8}{k+1}\geq\frac{36}{(k+1)^2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow k-2\geq\frac{9}{k+1}\Leftrightarrow(k-2)(k+1)\geq 9$, adevărată pentru că $(k-2)(k+1)\geq 4\cdot 7\geq 9$, pentru $k\geq 6$.

Deci $x_{k+1}\geq k-\frac{6}{k+1}$. 4p

Așadar $n-1-\frac{6}{n}\leq x_n\leq n-1$, adică $-1-\frac{6}{n}\leq x_n-n\leq -1$ și atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-n)=-1$. 1p

Oficiu 1p

Problema 3

Fie $a,b\in\mathbb{R}$ *cu* $a<b$ *și* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *o funcție neconstantă cu proprietatea lui Darboux. Demonstrați că, oricare ar fi* $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$, *există* $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_n\in[a,b]$ *cu* $c_0<c_1<c_2<\ldots<c_n$, *astfel încât numerele* $f(c_0),f(c_1),f(c_2),\ldots,f(c_n)$ *sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice neconstante.*

Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara, G.M. 12/2023

Soluție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Cum funcția f nu este constantă, atunci există $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$ astfel încât $f(x) \neq f(y)$. Notăm $c_0 = \min(x,y)$ și $c_n = \max(x,y)$. 1p

Fie $r = \dfrac{f(c_n) - f(c_0)}{n}$ și numerele $\lambda_k = f(c_o) + k \cdot r$, $k \in \{1,2,3,\ldots,n-1\}$.

Se constată ușor că numerele $f(c_0), \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, f(c_n)$ sunt în progresie aritmetică cu rația $r = \dfrac{f(c_n) - f(c_0)}{n}$. 3p

Deoarece λ_1 se află între $f(c_0)$ și $f(c_n)$ și f are proprietatea Darboux (PD), atunci există $c_1 \in (c_0, c_n)$ astfel încât $f(c_1) = \lambda_1$. 2p

Cum numărul λ_2 se află între $\lambda_1 = f(c_1)$ și $f(c_n)$ și f are PD, atunci există $c_2 \in (c_1, c_n)$ astfel încât $f(c_2) = \lambda_2$. 1p

Inductiv, ajungem că numărul λ_{n-1} se află între $\lambda_{n-2} = f(c_{n-2})$ și $f(c_n)$ și cum f are PD, atunci există $c_{n-1} \in (c_{n-2}, c_n)$ astfel încât $f(c_{n-1}) = \lambda_{n-1}$.

Numerele aflate astfel, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ au proprietatea din enunțul problemei. 2p

Oficiu 1p