CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a X-a

Problema 1.

Pentru un număr natural nenul p, notăm $a_p = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot p^p$ și $s_p = 1+2+\ldots+p$. Să se arate că $\left[1+\frac{\sqrt[s_2]{a_2}}{1+2^2}+\frac{\sqrt[s_3]{a_3}}{1+2^2+3^2}+\ldots+\frac{\sqrt[s_n]{a_n}}{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}\right]=1$, unde n este un număr natural nenul.

($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.)

Problema 2.

Fie ecuația $2^{2^x} = 4x^2$ cu $x \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvați ecuația în mulțimea $(0,\infty)$.

b) Arătați că ecuația are o soluție unică pe intervalul $(-\infty,0)$ și precizați un interval de lungime $\frac{1}{4}$ în care se află această soluție.

Problema 3.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile:

i) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) Există un cel mai mic număr strict pozitiv a, cu proprietatea că $f(a)=\max f>0$, unde $\max f$ reprezintă valoarea maximă a funcției f.

Arătați că f este o funcție periodică cu perioada a.

Dați exemplu de o funcție care verifică proprietățile i) și ii).

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a X-a
Barem de evaluare şi notare

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1.

Pentru un număr natural nenul p, notăm $a_p = 1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot p^p$ și $s_p = 1+2+\ldots+p$. Să se arate că $\left[1+\frac{\sqrt[s_2]{a_2}}{1+2^2}+\frac{\sqrt[s_3]{a_3}}{1+2^2+3^2}+\ldots+\frac{\sqrt[s_n]{a_n}}{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}\right]=1$, *unde n este un număr natural nenul.*
($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.)

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție

Evident pentru $n=1$, răspunsul este 1. .... 1p

Pentru $n\geq 2$, folosind inegalitatea mediilor pentru $s_p=\frac{p(p+1)}{2}$ numere, avem

$\sqrt[s_p]{a_p}=\sqrt[s_p]{1\cdot(2\cdot 2)\cdot(3\cdot 3\cdot 3)\cdot\ldots\cdot(p\cdot p\cdot\ldots\cdot p)}<\frac{1+(2+2)+(3+3+3)+\ldots+(p+p+\ldots+p)}{s_p}$, adică

$\sqrt[s_p]{a_p}<\frac{1+2^2+3^2+\ldots+p^2}{s_p}$. 3p

Așadar $\frac{\sqrt[s_p]{a_p}}{1+2^2+3^2+\ldots+p^2}<\frac{1}{s_p}=\frac{2}{p(p+1)}$, rezultă atunci că

$1+\sum_{p=2}^{n}\frac{\sqrt[s_p]{a_p}}{1+2^2+3^2+\ldots+p^2}<\sum_{p=1}^{n}\frac{2}{p(p+1)}=2\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$, ... 3p

Cum $1+\sum_{p=2}^{n}\frac{\sqrt[s_p]{a_p}}{1+2^2+3^2+\ldots+p^2}>1$, rezultă că $\left[1+\frac{\sqrt[s_2]{a_2}}{1+2^2}+\frac{\sqrt[s_3]{a_3}}{1+2^2+3^2}+\ldots+\frac{\sqrt[s_n]{a_n}}{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}\right]=1$,

pentru $n\geq 2$, rezultat care rămâne valabil și pentru $n=1$.
.... 2p
Oficiu 1p

Problema 2.

Fie ecuația $2^{2^x}=4x^2$ cu $x\in\mathbb{R}$.
a) Rezolvați ecuația în mulțimea $(0,\infty)$.

b) Arătați că ecuația are o soluție unică pe intervalul $(-\infty,0)$ și precizați un interval de lungime $\frac{1}{4}$ în care se află această soluție.

Marcel Popescu, Slobozia

Soluție

a) Fie $x\in(0,\infty)$, atunci ecuația se scrie $\log_2 2^{2^x}=\log_2(4x^2)$, ecuație care este echivalentă cu ecuația $2^x=2+2\log_2 x$ sau $f(x)=g(x)$, unde $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$, $g(x)=2+2\log_2 x$. Deoarece funcția f este convexă iar funcția g este concavă, atunci ecuația $f(x)=g(x)$ are cel mult două soluții pe $(0,\infty)$. 2p

Cum $f(1)=g(1)=2$ și $f(2)=g(2)=4$, atunci ecuația $f(x)=g(x)$, deci și ecuația $2^{2^x}=4x^2$, are pe $(0,\infty)$ doar soluțiile $x_1=1$, $x_2=2$. 2p

b) Pentru $x\in(-\infty,0)$, avem $\log_2 x^2=2\log_2(-x)$. În aceste condiții ecuația din enunț este echivalentă cu ecuația $2^x=2+2\log_2(-x)$ sau $h(x)=0$, unde $h:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, $h(x)=2^x-2-2\log_2(-x)$. De asemenea $h(x)=h_1(x)-h_2(x)$, unde $h_1,h_2:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, $h_1(x)=2^x-2$, $h_2(x)=2\log_2(-x)$ și cum funcția h_1 este strict crescătoare iar funcția h_2 este strict descrescătoare, rezultă că funcția $h=h_1-h_2$ este strict crescătoare. Prin urmare ecuația $h(x)=0$ are cel mult o soluție pe $(-\infty,0)$. 3p

Avem $h(-1)=-\frac{3}{2}<0$ și $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$, deci ecuația $h(x)=0$ are exact o soluție pe $(-\infty,0)$, notată x_0 .... 1p

Mai mult, cum $\log_2 3>\frac{3}{2}$, atunci $h\left(-\frac{3}{4}\right)=2^{\frac{-3}{4}}-2-2\log_2\frac{3}{4}=2^{\frac{-3}{4}}+2-2\log_2 3<2^{\frac{-3}{4}}-1<0$, ceea ce înseamnă că $x_0\in\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$, adică soluția se găsește într-un interval de lungime $\frac{1}{4}$. 1p

Oficiu 1p

Problema 3

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile:

i) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$;

ii) Există un cel mai mic număr strict pozitiv a, cu proprietatea că $f(a)=\max f>0$, unde $\max f$ reprezintă valoarea maximă a funcției f.

Arătați că f este o funcție periodică cu perioada a.

Dați exemplu de o funcție care verifică proprietățile i) și ii).

Marius Dolcan, Deva, GM 12/2023

Soluție

Avem $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ (1)

oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

În (1) $x=y=0\Rightarrow 2f(0)=2f^2(0)$, de unde $f(0)\in\{0,1\}$.

Dacă $f(0)=0$, luăm $y=0$ în (1) și obținem $2f(x)=2f(x)f(0)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, adică $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, contradicție cu $f(a)=\max f>0$. Așadar $f(0)=1$. 2p

În (1) facem $x=y$ și atunci pentru orice $x\in\mathbb{R}$, avem

$$f(2x)+1=2f^2(x) \quad (2)$$

În (2) luăm $x=a$ și cum $f(2a)\le f(a)=\max f$, avem $2f^2(a)=f(2a)+1\le f(a)+1$, de unde $f(a)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$. Deoarece $f(a)=\max f>0$, $f(0)=1$, rezultă că $f(a)=1$.

.... 2p

În (2) luăm $x=\frac{a}{2}$ și avem $f(a)+1=2f^2\left(\frac{a}{2}\right)$. Deoarece $f(a)=1$, obținem $f\left(\frac{a}{2}\right)\in\{-1,1\}$. Cum a este cel mai mic număr strict pozitiv pentru care $f(a)=\max f=1$, rezultă că $f\left(\frac{a}{2}\right)=-1$.

.... 1p

În (2), facem $x=\frac{a}{4}$ și obținem $0=f\left(\frac{a}{2}\right)+1=2f^2\left(\frac{a}{4}\right)$, adică $f\left(\frac{a}{4}\right)=0$

În (1) facem $y=\frac{a}{4}$ și obținem $f\left(x+\frac{a}{4}\right)+f\left(x-\frac{a}{4}\right)=2f(x)f\left(\frac{a}{4}\right)=0$, adică $f\left(x+\frac{a}{4}\right)=-f\left(x-\frac{a}{4}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ sau notând $t=x-\frac{a}{4}$, avem $f\left(t+\frac{a}{2}\right)=-f(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$ și atunci $f(t+a)=f\left(\left(t+\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}\right)=-f\left(t+\frac{a}{2}\right)=f(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că a este perioadă a funcției f. 2p

Un exemplu de funcție este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$, iar $a=2\pi$ 2p

Oficiu 1p